Teorema della divergenza su domini regolari bidimensionali

Domini regolari bidimensionali

Ricordiamo che per i domini regolari (di classe C^1) bidimensionali vale il teorema seguente.

Teorema 1. *Sia D un dominio di classe C^1 in $\mathbb{R}^2$ e sia $\nu : \partial D \to \mathbb{R}^2$ il vettore normale uscente su ∂D. Allora, esiste una famiglia finita di curve*

$$\sigma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{R}^2\ , \qquad j = 1, \dots, N\,,$$

tali che:

- *per ogni $j = 1, \dots, N$, la curva*
$$\sigma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{R}^2$$
è una curva semplice, chiusa, di classe C^1, con $\sigma_j'(a_j) = \sigma_j'(b_j)$, e regolare, ovvero:
$$|\sigma_j'(t)| > 0 \quad \text{per ogni} \quad t \in [a_j, b_j].$$
- *per ogni coppia di indici $i \neq j$*
$$\mathrm{Im}(\sigma_i) \cap \mathrm{Im}(\sigma_j) = \emptyset\,,$$
dove $\mathrm{Im}(\sigma_i)$ e $\mathrm{Im}(\sigma_j)$ sono i sostegni delle curve σ_i e σ_j:
$$\mathrm{Im}(\sigma_i) := \Big\{\sigma_i(t)\ :\ t \in [a_i, b_i]\Big\};$$
- *le curve σ_i, $i = 1, \dots, N$, parametrizzano il bordo di D, ovvero*
$$\partial D = \bigcup_{j=1}^{N} \mathrm{Im}(\sigma_j)\ ;$$
- *le curve σ_i sono orientate positivamente:*
$$\det\Big(\nu\big(\sigma_i(t)\big)\,,\ \sigma_i'(t)\Big) > 0 \qquad \text{per ogni} \qquad t \in [a_i, b_i],$$
e per ogni indice $i = 1, \dots, N$.

Definizione 2. *Dati un dominio D in $\mathbb{R}^2$ di classe C^1 con vettore normale uscente*

$$\nu : \partial D \to \mathbb{R}^2,$$

ed un campo vettoriale continuo

$$\Phi : \partial D \to \mathbb{R}^2,$$

l'intergale del flusso di Φ attraverso il bordo è dato da:

$$\int_{\partial D} \Phi \cdot \nu := \sum_{j=1}^{N} \int_{\sigma_j} \Phi \cdot \nu\,,$$

dove, per ogni $= 1, \dots, N$,

$$\int_{\sigma_j} \Phi \cdot \nu$$

è l'integrale della funzione $\Phi \cdot \nu$ sulla curva $\sigma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{R}^2$, ovvero

$$\int_{\sigma_j} \Phi \cdot \nu = \int_{a_j}^{b_j} \Phi\big(\sigma_j(t)\big) \cdot \nu\big(\sigma_j(t)\big)\, \big|\sigma_j'(t)\big|\, dt\,.$$

Teorema della divergenza su domini regolari

Teorema 3 (Teorema della divergenza in domini regolari). *Sia D un dominio in $\mathbb{R}^2$ con bordo ∂D di classe C^1. Sia Ω un aperto che contiene D e sia*

$$\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^2, \qquad \Phi(x,y) = \big(F(x,y), G(x,y)\big),$$

un campo vettoriale di classe C^1 su Ω.

$$\int_D \operatorname{div} \Phi(x,y)\, dx\, dy = \int_{\partial D} \Phi \cdot \nu,$$

dove $\nu : \partial D \to \mathbb{R}^2$ è il versore normale uscente sul bordo di D.

Dimostrazione. Consideriamo la partizione dell'unità

$$\psi_j \ , \quad j = 1, \dots, N$$

relativa al dominio D ed i rettangoli associati

$$\mathcal{R}_j \ , \quad j = 1, \dots, N.$$

Quindi, si ha che:

- $\displaystyle\sum_{j=1}^N \psi_j \equiv 1 \quad \text{su} \quad D\,;$
- per ogni $j := 1, \dots, N$, $\psi_j \equiv 0$ su $D \setminus \mathcal{R}_j$ e $D \cap \mathcal{R}_j$ è un dominio normale.

In particolare, se

$$\nu_j : \partial(D \cap \mathcal{R}_j) \to \mathbb{R}^2$$

è il vettore normale uscente sul bordo del dominio normale $D \cap \mathcal{R}_j$, allora:

$$\int_{\partial(D\cap\mathcal{R}_j)} (\psi_j F) \cdot \nu_j = \int_{\partial D \cap \mathcal{R}_j} (\psi_j F) \cdot \nu_j = \int_{\partial D \cap \mathcal{R}_j} (\psi_i F) \cdot \nu = \int_{\partial D} (\psi_j F) \cdot \nu.$$

Quindi, usando il teorema della divergenza sui domini normali $D \cap \mathcal{R}_j$ otteniamo che:

$$\begin{aligned}
\int_D \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy &= \int_D \operatorname{div} \Big(F \sum_{i=1}^N \psi_i\Big)\, dx\, dy \\
&= \int_D \operatorname{div} \Big(\sum_{i=1}^N F\psi_i\Big)\, dx\, dy \\
&= \int_D \left(\sum_{i=1}^N \operatorname{div} \big(F\psi_i\big)\right)\, dx\, dy \\
&= \sum_{i=1}^N \int_D \operatorname{div} \big(F\psi_i\big)\, dx\, dy \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{D\cap\mathcal{R}_i} \operatorname{div} \big(F\psi_i\big)\, dx\, dy \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{\partial D} \big(F\psi_i\big) \cdot \nu \\
&= \int_{\partial D} \left(\sum_{i=1}^N F\psi_i\right) \cdot \nu \\
&= \int_{\partial D} F \cdot \nu\,.
\end{aligned}$$

$\square$