
Prova scritta Analisi Matematica II - 30 giugno 2021

Non è consentito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (e altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Matricola:

Corso: *Analisi 2 e Calcolo Numerico* oppure *Analisi 2 e Complementi di Analisi*

Esercizio 1. *Dare la definizione di insieme connesso per archi in \mathbb{R}^2 .*

Esercizio 2. *Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ un insieme dato. Dimostrare che sono equivalenti.*

- (i) *Per ogni $X \in \mathbb{R}^2 \setminus C$ esiste $r > 0$ tale che $B_r(X) \subset \mathbb{R}^2 \setminus C$.*
- (ii) *Se $(X_n)_{n \geq 1}$ è una successione di punti di C che converge ad un certo $X \in \mathbb{R}^2$, allora $X \in C$.*

Esercizio 3. Data una funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che F è differenziabile nel punto $(0,0)$, se ...

Esercizio 4. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + 5y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Calcolare le derivate parziali $\partial_x F(0, 0)$ e $\partial_y F(0, 0)$.
- (b) È vero che la funzione è differenziabile in $(0, 0)$? Perché?

Esercizio 5. Sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (a(t), b(t))$ una curva chiusa di classe C^1 .

1. La lunghezza di γ è data dalla formula:

2. Sia $r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^1 a valori strettamente positivi. Usando la formula del punto precedente, dedurre una formula per la lunghezza della curva

$$\gamma(t) = (r(t) \cos t, r(t) \sin t).$$

3. Calcolare la lunghezza della curva

$$\gamma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t).$$

Esercizio 6. Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = x^4 + x^2y - y^3.$$

La funzione F ha esattamente tre punti critici in \mathbb{R}^2 :

$$A_0 = (0, 0), \quad A_1 = (x_1, y_1) \quad e \quad A_2 = (x_2, y_2).$$

- (a) Trovare le coordinate dei punti critici A_1 e A_2 .
- (b) Calcolare la matrice Hessiana $H = \nabla^2 F$ di F in A_1 e A_2 .
- (c) Per ciascuna delle matrici $\nabla^2 F(A_1)$ e $\nabla^2 F(A_2)$ dire se è definita positiva, definita negativa, semi-definita positiva, semi-definita negativa, oppure ne semi-definita positiva ne semi-definita negativa.
- (d) Che cosa si può dire sul comportamento locale della funzione nei punti A_1 e A_2 , usando il risultato del punto precedente?

Esercizio 7. Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = e^{x+2y} + \ln(1 + 2y + xy)$$

e la curva

$$\gamma(t) = (\sin(3t), t^2 - t).$$

Calcolare la derivata $(F \circ \gamma)'(t)$ della funzione composta $t \mapsto F(\gamma(t))$ nel punto $t = 0$.

Esercizio 8. Consideriamo la forma differenziale

$$\alpha = (y + xy^2) dx + (x - x^2y) dy.$$

Calcolare $d\alpha$.

Esercizio 9. Consideriamo il dominio d'integrazione

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2x^2 \leq y \leq 2x + x^2\}.$$

e la funzione

$$F(x, y) = xy.$$

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D F(x, y) dx dy.$$

Esercizio 10. Per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la forma differenziale

$$\alpha = \frac{ay + x}{x^2 + y^2} dx + \frac{x + y}{x^2 + y^2} dy$$

è chiusa? Per i valori trovati calcolare $\int_\gamma \alpha$, dove γ è la curva

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos(2t), \sin(2t)).$$

Esercizio 11. Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x, y) = ((x + y)e^{x^2+y^2}, (x - y)e^{-x^2-y^2})$$

Calcolare l'integrale

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x, y) dx dy.$$

Esercizio 12. Siano

$$a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad e \quad b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

tre funzioni C^∞ . Consideriamo la 1-forma.

$$\alpha = a(x, y) dx + b(x, y) dy.$$

Sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva chiusa di classe C^1 .

1. Definire l'integrale $\int_\gamma \alpha$.

2. Dimostrare che se la forma α è chiusa, allora $\int_\gamma \alpha = 0$.

Esercizio 13. Calcolare l'integrale

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx.$$
