Prova scritta Analisi Matematica II - giugno 2021

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (e altri dispositivi connessi), ne di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Matricola:

Corso: ☐ *Analisi 2 e Calcolo Numerico* oppure ☐ *Analisi 2 e Complementi di Analisi*

Esercizio 1. *Dare la definizione di insieme aperto in* $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2. *La definizione seguente di insieme compatto è sbagliata:*

Un insieme $C \subset \mathbb{R}^2$ è compatto se ogni successione $(x_n)_{n\geq 1}$ di punti di C ha un limite $y \in \mathbb{R}^d$.

La definizione giusta è:

Esercizio 3. *Data una funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Diciamo che* F *è differenziabile nel punto* $(0,0)$, *se ...*

Esercizio 4. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+5y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) *Calcolare le derivate parziali* $\partial_x F(0,0)$ *e* $\partial_y F(0,0)$.

(b) *È vero che la funzione è differenziabile in* $(0,0)$*? Perché?*

Esercizio 5. *Siano*

$$a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ , \qquad b : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad e \qquad b : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

tre funzioni C^∞. Consideriamo la 1-forma.

$$\alpha = a(x, y, z)\, dx + b(x, y, z)\, dy + c(x, y, z)\, dz\,.$$

1. *Diciamo che la forma α è chiusa, se:*

---

2. *In termini delle funzioni a, b e c, questo si traduce nel seguente sistema:*

---

3. *Diciamo, invece, che la 1-forma è esatta, se esiste una funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che:*

Esercizio 6. *Siano*

$$a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad e \qquad b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,$$

tre funzioni C^∞. Consideriamo la 1-forma.

$$\alpha = a(x, y)\, dx + b(x, y)\, dy\,.$$

Sia $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ una curva chiusa di classe C^1.

1. *Definire l'integrale $\displaystyle\int_\gamma \alpha$.*

2. *Dimostrare che se la forma* α *è chiusa, allora* $\displaystyle\int_\gamma \alpha = 0$.

Esercizio 7. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^3 + xy - y^2\,.$$

La funzione F *ha esattamente due punti critici in* $\mathbb{R}^2$: $A_0 = (0,0)$ *e* $A_1 = (x_1, y_1)$.

(a) *Trovare le coordinate* (x_1, y_1) *del punto critico* A_1.

(b) *Calcolare la matrice Hessiana* $H = \nabla^2 F$ *di* F *in* A_0.

(c) *Dire se la matrice Hessiana* $\nabla^2 F(A_0)$ *è definita positiva, definita negativa, semi-definita positiva, semi-definita negativa, oppure ne semi-definita positiva ne semi-definita negativa.*

(d) *Dire che cosa si può dire sul comportamento locale della funzione nel punto* A_0, *usando il risultato del punto precedente.*

(e) *Calcolare la matrice Hessiana* $H = \nabla^2 F$ *di* F *in* A_1.

(f) *Dire se la matrice Hessiana* $\nabla^2 F(A_1)$ *è definita positiva, definita negativa, semi-definita positiva, semi-definita negativa, oppure ne semi-definita positiva ne semi-definita negativa.*

(g) *Dire che cosa si può dire sul comportamento locale della funzione nel punto* A_1, *usando il risultato del punto precedente.*

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \cos(2x+y) + \sin(y - xy)$$

e la curva

$$\gamma(t) = (t + t^2, \sin(3t)).$$

Calcolare la derivata $(F \circ \gamma)'(t)$ *della funzione composta* $t \mapsto F(\gamma(t))$ *nel punto* $t = 0$.

Esercizio 9. *Consideriamo la forma differenziale*

$$\alpha = (xy + 3x - y^2)\,dx + (x + x^2 + y^3)\,dy.$$

Calcolare $d\alpha$.

Esercizio 10. *Consideriamo il dominio*

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \le y \le 2x - x^2\Big\}.$$

e la funzione

$$F(x,y) = xy.$$

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D F(x,y)\,dx\,dy.$$

Esercizio 11. *Sia* α *la* 1*-forma*

$$\alpha = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

e sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ *la curva*

$$\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t).$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha.$

Esercizio 12. *Sia* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \left(\frac{x+2y}{x^2+y^2}\,,\ \frac{y+2x}{x^2+y^2}\right)$$

Calcolare l'integrale

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy.$$