Esempio di una 1-forma chiusa, ma non esatta

Proposizione 1. *Consideriamo la 1-forma*

$$\alpha = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

sull'insieme $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. *La forma* α *è chiusa, ma non esatta.*

Dimostrazione. Per dimostrare che la forma non è esatta, consideriamo la curva chiusa

$$\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \sigma(t) = \big(x(t), y(t)\big) = \big(\cos t\,,\,\sin t\,\big).$$

Se la 1-forma α fosse esatta, allora si avrebbe

$$\int_\sigma \alpha = 0.$$

D'altra parte, applcando la definizione di integrale di una 1-forma su una curva, otteniamo

$$\begin{aligned}\int_\sigma \alpha &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-y(t)}{x(t)^2+y(t)^2} x'(t) + \frac{x(t)}{x(t)^2+y(t)^2} y'(t) \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t+\sin^2 t}(-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t} \cos t \right) dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi.\end{aligned}$$

Siccome

$$\int_\sigma \alpha = 2\pi \neq 0,$$

abbiamo che α non può essere esatta su Ω. $\square$

Osservazione 2. *Osserviamo che sull'insieme*

$$\mathcal{R} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R} \;:\; y > 0\Big\},$$

la forma α *è esatta! Infatti, l'insieme* $\mathcal{R}$ *è un rettangolo e quindi su* $\mathcal{R}$ *ogni forma chiusa è esatta (*α *compresa).*