Forme chiuse e forme esatte in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Teorema 1. *Sia γ la curva*

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \ , \quad \gamma(t) = \big(\cos t \, , \, \sin t \, \big) \, .$$

Sia α una 1-forma chiusa di classe C^1 in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Allora, α è esatta se e solo se $\displaystyle\int_\gamma \alpha = 0 \, .$

Dimostrazione. Definiamo l'arco

$$\mu : \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big] \to \mathbb{R}^2 \ , \qquad \mu(t) = \big(\cos t, \sin t \, \big) \, .$$

Consideriamo gli insiemi

$$A = \mathbb{R}^2 \setminus \Big\{(x,y) \ : \ y = 0, \ x \le 0\Big\},$$

$$B = \mathbb{R}^2 \setminus \Big\{(x,y) \ : \ x = 0, \ y \le 0\Big\}.$$

Per ogni $(x,y) \in A$, definiamo la curva

$$\eta_{x,y} : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \ , \quad \eta_{x,y}(t) = (1-t)\big(1,0\big) + t\big(x,y\big)$$

e

$$F(x,y) = \int_{\eta_{x,y}} \alpha.$$

Allora,

$$F : A \to \mathbb{R}$$

è una funzione di classe C^1 tale che

$$dF = \alpha \quad \text{su} \quad A.$$

Per ogni $(x,y) \in B$, definiamo la curva

$$\sigma_{x,y} : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \ , \quad \sigma_{x,y}(t) = (1-t)\big(0,1\big) + t\big(x,y\big) \, ;$$

e

$$G(x,y) = \int_\mu \alpha + \int_{\sigma_{x,y}} \alpha.$$

Allora,

$$G : B \to \mathbb{R}$$

è una funzione di classe C^1 tale che

$$dG = \alpha \quad \text{su} \quad B.$$

Quindi basta dimostrare che

$$F \equiv G \quad \text{su} \quad A \cap B.$$

Osserviamo che

$$A \cap B = \Omega_+ \cup \Omega_-,$$

dove

$$\Omega_+ := \mathbb{R}^2 \setminus \Big\{(x,y) \ : \ x \le 0 \ \text{ e } \ y \le 0\Big\} \qquad \text{e} \qquad \Omega_- := \Big\{(x,y) \ : \ x < 0 \ \text{ e } \ y < 0\Big\}.$$

Consideriamo due casi.

Caso 1. Supponiamo che $(x,y) \in \Omega_+$. Osserviamo che anche

$$(1,0) \in \Omega_+ \quad \text{e} \quad (0,1) \in \Omega_+$$

e che Ω_+ è un aperto stellato. Allora, siccome α è chiusa (e quindi esatta su Ω), abbiamo

$$\int_\mu \alpha + \int_{\sigma_{x,y}} \alpha = \int_{\eta_{x,y}} \alpha \ ,$$

e quindi $F(x,y) = G(x,y)$.

Caso 2. Supponiamo che $(x,y) \in \Omega_-$. Consideriamo $r > 0$ e $\theta \in \Big(\pi, \dfrac{3}{2}\pi\Big)$ tali che

$$x = r\cos\theta \qquad \text{e} \qquad y = r \sin\theta \, .$$

Definiamo la curva
$$\xi : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \ , \quad \xi(t) = (1-t)\big(x,y\big) + t\big(\cos\theta, \sin\theta\big)\,.$$
Dimostreremo che
$$\int_\mu \alpha + \int_{\sigma_{x,y}} \alpha + \int_\xi \alpha = \int_{\eta_{x,y}} \alpha + \int_\xi \alpha\,.$$
Ora, siccome il concatenamento di μ, $\sigma_{x,y}$ e ξ è una curva che collega $(1,0)$ a $(\cos\theta, \sin\theta)$ nell'aperto stellato A, abbiamo che
$$\int_\mu \alpha + \int_{\sigma_{x,y}} \alpha + \int_\xi \alpha = \int_0^\theta (-\sin t, \cos t)\cdot \alpha(\cos t, \sin t)\, dt.$$
Analogamente, il concatenamento di $\eta_{x,y}$ e ξ è una curva che collega $(1,0)$ a $(\cos\theta, \sin\theta)$ nell'aperto stellato B. Quindi,
$$\int_{\eta_{x,y}} \alpha + \int_\xi \alpha + \int_\theta^{2\pi} (-\sin t, \cos t)\cdot \alpha(\cos t, \sin t)\, dt = 0.$$
Quindi,
$$\begin{aligned}\int_\mu \alpha + \int_{\sigma_{x,y}} \alpha - \int_{\eta_{x,y}} \alpha &= \left(\int_\mu \alpha + \int_{\sigma_{x,y}} \alpha + \int_\xi \alpha\right) - \left(\int_{\eta_{x,y}} \alpha + \int_\xi \alpha\right)\\ &= \int_0^\theta (-\sin t, \cos t)\cdot \alpha(\cos t, \sin t)\, dt + \int_\theta^{2\pi} (-\sin t, \cos t)\cdot \alpha(\cos t, \sin t)\, dt\\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t)\cdot \alpha(\cos t, \sin t)\, dt = \int_\gamma \alpha = 0\,,\end{aligned}$$
il che conclude la dimostrazione. □

Corollario 2. *Sia α la 1-forma*
$$\alpha = \frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy.$$
Allora, per ogni 1-forma chiusa β di classe C^1 su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, esistono una funzione di classe C^1
$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$$
ed una costante $t \in \mathbb{R}$ tali che
$$\beta = t\alpha + dF \quad su \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$