Integrazione di 1-forme su curve parametriche

Definizione

Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $\gamma : [a, b] \to \Omega$ una curva. Sia

$$\alpha = \alpha_1(x)\, dx_1 + \alpha_2(x)\, dx_2 + \cdots + \alpha_n(x)\, dx_n$$

una 1-forma di classe C^0 su Ω.

Se γ è di classe C^1, allora definiamo l'integrale di α su γ come

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \alpha(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt\,,$$

dove $\cdot$ è il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ e dove abbiamo identificato la forma α con il campo vettoriale

$$\alpha : \Omega \to \mathbb{R}^n, \qquad \alpha(x) = \big(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x)\big).$$

Se invece $\gamma : [a, b] \to \Omega$ è C^1 a tratti, allora definiamo

$$\int_\gamma \alpha = \sum_{j=1}^{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \alpha(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt\,,$$

dove

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$$

è una qualsiasi partizione di $[a, b]$ tale che $\gamma : [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{R}^n$ è di classe $C^1([t_{j-1}, t_j])$ per ogni $j = 1, \dots, k$.

Linearità

Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ e siano α e β due 1-forme (di classe C^0) su Ω. Sia

$$\gamma : [a, b] \to \Omega$$

una curva C^1 a tratti. Allora,

$$\int_\gamma (\alpha + \beta) = \int_\gamma \alpha + \int_\gamma \beta.$$

Integrazione di forme su curve concatenate

Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ e sia α una 1-forma di classe C^0 su Ω. Siano

$$\gamma_1 : [a, b] \to \Omega \qquad \text{e} \qquad \gamma_2 : [b, c] \to \Omega$$

due curve C^1 a tratti tali che

$$\gamma_1(b) = \gamma_2(b).$$

Allora,

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha + \int_{\gamma_2} \alpha.$$

Integrazione di forme su curve inverse

Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ e α una 1-froma di classe C^1 su Ω. Se $\gamma : [a, b] \to \Omega$ è una curva C^1 a tratti e se

$$\gamma_- : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad \gamma_-(t) = \gamma(a + b - t),$$

allora

$$\int_{\gamma_-} \alpha = -\int_\gamma \alpha.$$

Integrazione di forme su curve equivalenti

Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ e α una 1-forma di classe C^0 su Ω. Supponiamo che le curve

$$\gamma : [a,b] \to \Omega \qquad \text{e} \qquad \sigma : [A,B] \to \Omega$$

siano equivalenti. Allora

$$\int_\gamma \alpha = \int_\sigma \alpha.$$

Infatti, se $g : [a,b] \to [A,B]$ è la funzione tale che $\gamma = \sigma \circ g$, allora

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \alpha &= \int_a^b \alpha\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\,dt \qquad \text{(per definizione)}\\
&= \int_a^b \alpha\big(\sigma\big(g(t)\big)\big) \cdot \sigma'\big(g(t)\big) g'(t)\,dt\\
&= \int_A^B \alpha\big(\sigma(s)\big) \cdot \sigma'(s)\,ds \qquad \text{(cambiamo variabile: } s = g(t),\ ds = g'(t)\,dt)\\
&= \int_\sigma \alpha \qquad \text{(per definizione).}
\end{aligned}$$

Integrazione di 1-forme esatte

Teorema 1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia α una 1-forma esatta in Ω; precisamente, supponiamo che $\alpha = dF$, dove $F : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1 su Ω. Allora, per ogni curva C^1 $\gamma : [a,b] \to \Omega$, abbiamo*

$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma dF = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big).$$

Dimostrazione. Siccome $\alpha = dF$, il campo associato alla forma α è dato dal gradiente ∇F.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \alpha &= \int_a^b \nabla F\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\,dt \qquad \text{(per definizione)}\\
&= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\Big[F\big(\gamma(t)\big)\Big]\,dt \qquad \text{(per la formula della derivata di una funzione composta)}\\
&= F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big) \qquad \text{(per il teorema fondamentale del calcolo integrale).}
\end{aligned}$$

□

Corollario 2. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia α una 1-forma esatta in Ω; precisamente, supponiamo che $\alpha = dF$, dove $F : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1 su Ω. Allora, per ogni curva C^1 a tratti $\gamma : [a,b] \to \Omega$, abbiamo*

$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma dF = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big).$$

Dimostrazione. Sia

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k = b$$

una partizione di $[a,b]$ tale che

$$\gamma : [t_j, t_{j+1}] \to \mathbb{R}$$

sia di classe C^1 per ogni $j = 0, \dots, k-1$. Allora,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \alpha &= \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \nabla F\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\,dt\\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \Big(F\big(\gamma(t_{j+1})\big) - F\big(\gamma(t_j)\big)\Big) = F\big(\gamma(t_k)\big) - F\big(\gamma(t_0)\big) = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big).
\end{aligned}$$

□

Corollario 3. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia α una 1-forma esatta in Ω.*
Allora, per ogni curva chiusa e C^1 a tratti $\gamma : [a,b] \to \Omega$, abbiamo che $\displaystyle\int_\gamma \alpha = 0$.