Forme esatte e forme chiuse

Forme chiuse - definizione

Definizione 1 (Forme chiuse). *Diciamo che una k-forma α (di classe C^1) è* **chiusa** *se $d\alpha = 0$.*

Osservazione 2 (1-forme chiuse in $\mathbb{R}^2$). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia α la 1-forma*

$$\alpha = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy\,.$$

Allora la forma α è chiusa se e solo se i coefficienti

$$a:\Omega\to\mathbb{R} \qquad e \qquad b:\Omega\to\mathbb{R}$$

soddisfano l'equazione

$$\partial_y a = \partial_x b \quad in \quad \Omega\ .$$

Osservazione 3 (1-forme chiuse in $\mathbb{R}^3$). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$ e sia α la 1-forma*

$$\alpha = a(x,y,z)\,dx + b(x,y,z)\,dy + c(x,y,z)\,dz\,.$$

Allora la forma α è chiusa se e solo se i coefficienti

$$a:\Omega\to\mathbb{R}\ , \qquad b:\Omega\to\mathbb{R}\ , \qquad c:\Omega\to\mathbb{R}\ ,$$

sono soluzioni del sistema

$$\partial_y a = \partial_x b\,, \quad \partial_z a = \partial_x c \quad e \quad \partial_z b = \partial_y c \quad in \quad \Omega.$$

Osservazione 4 (2-forme chiuse in $\mathbb{R}^3$). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$ e sia α la 2-forma*

$$\alpha = a(x,y,z)\,dy\wedge dz + b(x,y,z)\,dz\wedge dx + c(x,y,z)\,dx\wedge dy\,.$$

Allora la forma α è chiusa se e solo se i coefficienti

$$a:\Omega\to\mathbb{R}\ , \qquad b:\Omega\to\mathbb{R}\ , \qquad c:\Omega\to\mathbb{R}\ ,$$

sono soluzioni dell'equazione sistema

$$\partial_x a + \partial_y b + \partial_z c = 0 \quad in \quad \Omega.$$

Osservazione 5. *Siccome l'unica $(n+1)$-forma in $\mathbb{R}^n$ è quella nulla, abbiamo che le n-forme in $\mathbb{R}^n$ (o definite su un qualsiasi aperto di $\mathbb{R}^n$) sono sempre chiuse.*

Forme esatte - definizione

Definizione 6 (Forme esatte). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $k\geq 1$. Diciamo che una k-forma α (di classe C^0 su Ω) è* **esatta** *se esiste una $(k-1)$ forma β (di classe C^1 su Ω) tale che $d\beta = \alpha$.*

Osservazione 7 (1-forme esatte in $\mathbb{R}^2$). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia α la 1-forma (di classe C^0 su Ω)*

$$\alpha = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy\,.$$

Allora, la forma α è esatta se e solo se esiste una funzione

$$F:\Omega\to\mathbb{R},$$

di classe C^1 su Ω, tale che

$$\partial_x F = a \qquad e \qquad \partial_y F = b \qquad in \qquad \Omega\ .$$

Osservazione 8 (1-forme esatte in $\mathbb{R}^3$). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$ e sia α la 1-forma (di classe C^0 su Ω)*

$$\alpha = a(x,y,z)\,dx + b(x,y,z)\,dy + c(x,y,z)\,dz\,.$$

Allora, la forma α è esatta se e solo se esiste una funzione

$$F : \Omega \to \mathbb{R},$$

di classe C^1 su Ω, tale che

$$\partial_x F = a\,,\quad \partial_y F = b \quad e \quad \partial_z F = c \quad in \quad \Omega\ .$$

Osservazione 9 (2-forme esatte in $\mathbb{R}^3$). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$ e sia α la 2-forma (di classe C^0 su Ω)*

$$\alpha = a(x,y,z)\,dy\wedge dz + b(x,y,z)\,dz\wedge dx + c(x,y,z)\,dx\wedge dy\,.$$

Allora, la forma α è esatta se e solo se esiste una 1-forma β (di classe C^1 su Ω)

$$\beta = A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz\,,$$

tale che

$$\partial_y C - \partial_z B = a\,,\qquad \partial_z A - \partial_x C = b \qquad e \qquad \partial_x B - \partial_y A = c \qquad in \qquad \Omega\ .$$

I CAMPI VETTORIALI IN $\mathbb{R}^3$ COME 1-FORME

Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^3$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \Big(a(x,y,z),\ b(x,y,z),\ c(x,y,z)\Big)$$

di classe C^1 su Ω. Possiamo associare al campo F la seguente 1-forma differenizale su Ω

$$\alpha = a(x,y,z)\,dx + b(x,y,z)\,dy + c(x,y,z)\,dz\ .$$

Calcoliamo

$$d\alpha = \big(\partial_y c - \partial_z b\big)\,dy\wedge dz + \big(\partial_z a - \partial_x c\big)\,dz\wedge dx + \big(\partial_x b - \partial_y a\big)\,dx\wedge dy\ .$$

Definizione 10 (Rotore). *Il campo*

$$\mathrm{rot}\,F = \Big(\partial_y c - \partial_z b\,,\ \partial_z a - \partial_x c\,,\ \partial_x b - \partial_y a\Big) : \Omega \to \mathbb{R}^3$$

è detto **rotore** *di F e viene indicato anche con* $\vec{\nabla}\wedge F\ ,\quad \vec{\nabla}\times F\ ,\quad \nabla\wedge F\ ,\quad \nabla\times F\,.$

Definizione 11 (Campi irrotazionali e campi conservativi). *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^3$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 su Ω.*

- *se il campo vettoriale F ha rotore nullo, allora si dice che F è un* **campo irrotazionale***;*
- *se il campo F è il gradiente di una funzione $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$, allora si dice che F è un* **campo conservativo***.*

Si ha quindi che:

Osservazione: Dato un campo vettoriale

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^3\ ,\qquad F(x,y,z) = \Big(a(x,y,z),\ b(x,y,z),\ c(x,y,z)\Big)$$

e la 1-forma associata

$$\alpha = a(x,y,z)\,dx + b(x,y,z)\,dy + c(x,y,z)\,dz\ ,$$

abbiamo che:

- **F è un campo irrotazionale** $\Leftrightarrow$ **la 1-forma α è chiusa;**
- **F è un campo conservativo** $\Leftrightarrow$ **la 1-forma α è esatta.**

I campi vettoriali in $\mathbb{R}^3$ come 2-forme

Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^3$ e sia

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^3 \ , \qquad F(x,y,z) = \Big(a(x,y,z),\ b(x,y,z),\ c(x,y,z)\Big)$$

un campo vettoriale di classe C^1 su Ω.

Al campo F, possiamo associare la 2-forma

$$\alpha = a(x,y,z)\, dy \wedge dz + b(x,y,z)\, dz \wedge dx + c(x,y,z)\, dy \wedge dz\,.$$

Allora, possiamo calcolare

$$d\alpha = \Big(\partial_x a + \partial_y b + \partial_z c\Big)\, dx \wedge dy \wedge dz\,.$$

Definizione 12 (Divergenza)**.** *La funzione*

$$\operatorname{div} F = \Big(\partial_x a + \partial_y b + \partial_z c\Big) : \Omega \to \mathbb{R}$$

è detta **divergenza** *di F e viene indicata anche con* $\vec{\nabla} \cdot F$ *e* $\nabla \cdot F$.

Definizione 13 (Campi solenoidali e campi rotore)**.** *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^3$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 su Ω.*

- *se il campo vettoriale F ha divergenza nulla, allora si dice che F è un* **campo solenoidale***;*
- *se il campo F è il rotore di un altro campo $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$, allora si dice che F è un* **campo rotore***.*

Si ha quindi che:

Osservazione: Dato un campo vettoriale

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^3 \ , \qquad F(x,y,z) = \Big(a(x,y,z),\ b(x,y,z),\ c(x,y,z)\Big)$$

e la 2-forma associata

$$\alpha = a(x,y,z)\, dy \wedge dz + b(x,y,z)\, dz \wedge dx + c(x,y,z)\, dy \wedge dz\,.$$

abbiamo che:

- **F è un campo solenoidale $\Leftrightarrow$ la 2-forma α è chiusa;**
- **F è un campo rotore $\Leftrightarrow$ la 2-forma α è esatta.**