

Il toro non è una palla

UNA COSTRUZIONE GENERALE: PULL-BACK DI 1-FORME

Siano Ω_1 e Ω_2 due aperti di \mathbb{R}^2 e $\Phi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ una mappa di classe C^1 ,

$$\Phi(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) \quad \text{per ogni } (x, y) \in \Omega_1.$$

Sia α una 1-forma su Ω_2 . Scriviamo

$$\alpha = a(u, v) du + b(u, v) dv.$$

Definiamo la 1-forma β su Ω_1 come:

$$\begin{aligned} \beta &= a(u(x, y), v(x, y)) \left(\partial_x u(x, y) dx + \partial_y u(x, y) dy \right) \\ &\quad + b(u(x, y), v(x, y)) \left(\partial_x v(x, y) dx + \partial_y v(x, y) dy \right) \\ &= \left(a(u(x, y), v(x, y)) \partial_x u(x, y) + b(u(x, y), v(x, y)) \partial_x v(x, y) \right) dx \\ &\quad + \left(a(u(x, y), v(x, y)) \partial_y u(x, y) + b(u(x, y), v(x, y)) \partial_y v(x, y) \right) dy. \end{aligned}$$

La 1-forma β è detta pull-back di α .
Per indicare, il pull-back, si usa spesso la notazione $\beta = \Phi^* \alpha$.

Nel seguito vedremo che il pull-back $\beta = \Phi^* \alpha$ eredita le proprietà della forma α .

IL PULL-BACK DI UNA 1-FORMA CHIUSA È UNA 1-FORMA CHIUSA

Lemma 1. *Se Φ è di classe C^2 e α è chiusa, allora anche β è chiusa.*

Dimostrazione. Ricordiamo che α è chiusa se e solo se

$$\partial_v a(u, v) = \partial_u b(u, v).$$

Per verificare se β è una forma chiusa, calcoliamo

$$\begin{aligned} &\partial_y \left(a(u, v) \partial_x u + b(u, v) \partial_x v \right) - \partial_x \left(a(u, v) \partial_y u + b(u, v) \partial_y v \right) \\ &= \left(\partial_u a(u, v) \partial_y u + \partial_v a(u, v) \partial_y v \right) \partial_x u + \cancel{a(u, v) \partial_{yx} u} \\ &\quad + \left(\partial_u b(u, v) \partial_y u + \partial_v b(u, v) \partial_y v \right) \partial_x v + \cancel{b(u, v) \partial_{yx} v} \\ &\quad - \left(\partial_u a(u, v) \partial_x u + \partial_v a(u, v) \partial_x v \right) \partial_y u - \cancel{a(u, v) \partial_{xy} u} \\ &\quad - \left(\partial_u b(u, v) \partial_x u + \partial_v b(u, v) \partial_x v \right) \partial_y v - \cancel{b(u, v) \partial_{xy} v} \\ &= \left(\cancel{\partial_u a(u, v) \partial_{yx} u} + \partial_v a(u, v) \partial_y v \right) \partial_x u \\ &\quad + \left(\partial_u b(u, v) \partial_y u + \cancel{\partial_v b(u, v) \partial_{yx} v} \right) \partial_x v \\ &\quad - \left(\cancel{\partial_u a(u, v) \partial_{xy} u} + \partial_v a(u, v) \partial_x v \right) \partial_y u \\ &\quad - \left(\partial_u b(u, v) \partial_x u + \cancel{\partial_v b(u, v) \partial_{xy} v} \right) \partial_y v \\ &= \left(\partial_v a - \partial_u b \right) \partial_y v \partial_x u - \left(\partial_v a - \partial_u b \right) \partial_y u \partial_x v = 0. \end{aligned}$$

□

 INTEGRALE DI UNA 1-FORMA E DEL SUO PULL-BACK

Lemma 2. Sia $\Phi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ un diffeomorfismo di classe C^1 . Sia $\gamma : [A, B] \rightarrow \Omega_1$ una curva chiusa e C^1 a tratti. Allora anche $\Phi \circ \gamma : [A, B] \rightarrow \Omega_2$ è una curva chiusa e C^1 a tratti. Inoltre,

$$\int_{\gamma} \beta = \int_{\Phi \circ \gamma} \alpha.$$

Dimostrazione. Per ogni $t \in [A, B]$ scriviamo

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)).$$

Di conseguenza,

$$\Phi \circ \gamma(t) = \left(u(x(t), y(t)), v(x(t), y(t)) \right).$$

Siccome Φ è di classe C^1 , $\Phi \circ \gamma$ eredita la regolarità di γ . Ora, dimostriamo che $\int_{\gamma} \beta = \int_{\Phi \circ \gamma} \alpha$.

Per definizione abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \beta &= \int_A^B \left(a(u(x, y), v(x, y)) \partial_x u(x, y) + b(u(x, y), v(x, y)) \partial_x v(x, y) \right) x'(t) dt \\ &\quad + \int_A^B \left(a(u(x, y), v(x, y)) \partial_y u(x, y) + b(u(x, y), v(x, y)) \partial_y v(x, y) \right) y'(t) dt \\ &= \int_A^B a(u(x, y), v(x, y)) \left(\partial_x u(x, y) x'(t) + \partial_y u(x, y) y'(t) \right) dt \\ &\quad + \int_A^B b(u(x, y), v(x, y)) \left(\partial_x v(x, y) x'(t) + \partial_y v(x, y) y'(t) \right) dt \\ &= \int_A^B a(u(x, y), v(x, y)) \partial_t [u(x(t), y(t))] dt \\ &\quad + \int_A^B b(u(x, y), v(x, y)) \partial_t [v(x(t), y(t))] dt = \int_{\Phi \circ \gamma} \alpha. \end{aligned} \quad \square$$

 IL TORO E LA PALLA

Definizione 3. Diremo che due domini Ω_1 e Ω_2 di \mathbb{R}^n sono C^k -diffeomorfi se:

- esiste una funzione bigettiva $\Phi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$;
- la funzione Φ e la sua inversa $\Psi : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ sono di classe C^k .

Teorema 4 (Il toro non è una palla).

- (a) \mathbb{R}^2 e $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ non sono C^2 -diffeomorfi ;
- (b) in \mathbb{R}^2 , B_1 e $B_1 \setminus \{(0, 0)\}$ non sono C^2 -diffeomorfi ;
- (c) in \mathbb{R}^2 , B_1 e $B_1 \setminus \bar{B}_{1/2}$ non sono C^2 -diffeomorfi ;
- (d) in \mathbb{R}^3 , B_1 e T non sono C^2 -diffeomorfi, dove T è il toro

$$T := \left\{ (x, y, z) : \left(x - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + \left(y - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + z^2 < \frac{1}{4} \right\}.$$

Dimostrazione. (a) Supponiamo per assurdo che \mathbb{R}^2 e $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ siano diffeomorfi. Allora esistono una mappa (di classe C^1) biunivoca

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad \text{e la sua inversa} \quad \Psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

In $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ consideriamo la 1-forma

$$\alpha = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

e la curva chiusa

$$\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \sigma(t) = (\cos t, \sin t).$$

La 1-forma α è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, ma non esatta. In particolare,

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \alpha &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-y(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} x'(t) + \frac{x(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} y'(t) \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cos t \right) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Definiamo la curva

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \Psi \circ \sigma(t).$$

Allora, γ è una curva chiusa di classe C^1 ; inoltre, per definizione, abbiamo $\sigma = \Phi \circ \gamma$. Definiamo la 1-forma β come in Lemma 1. Allora β è una forma chiusa, e quindi esatta, in \mathbb{R}^2 . Quindi,

$$\int_{\gamma} \beta = 0.$$

D'altra parte, per il Lemma 2, abbiamo che

$$\int_{\gamma} \beta = \int_{\Phi \circ \gamma} \alpha = \int_{\sigma} \alpha = 2\pi$$

il che è un assurdo. La dimostrazione di (b), (c) e (d) è analoga. □