Pull-back di forme differenziali

Pull-back di 1-forme

Siano $\Omega_1 \in \mathbb{R}^n$ e $\Omega_2 \in \mathbb{R}^m$ due sottoinsiemi aperti rispettivamente di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.
Sia $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ una mappa di classe C^1.

$$\Phi(X) = \big(u_1(X), \dots, u_m(X)\big) \qquad \text{per ogni} \qquad X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega_1.$$

Sia α una 1-forma su Ω_2. Usando le coordiante

$$U = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m,$$

scriviamo α come

$$\alpha = a_1(U)\,du_1 + a_2(U)\,du_2 + \dots + a_m(U)\,du_m\,,$$

dove

$$a_j : \Omega_2 \to \mathbb{R} \qquad j = 1, \dots, m,$$

sono funzioni di classe C^1 su Ω_2. Ora,

$$\boxed{\text{scrivendo } U(X) \text{ al posto di } \Phi(X),}$$

possiamo definire la 1-forma β su Ω_1 come:

$$\begin{aligned}\beta = a_1\big(U(X)\big)&\Big(\partial_{x_1}u_1(X)\,dx_1 + \dots + \partial_{x_n}u_1(X)\,dx_n\Big)\\ &+ a_2\big(U(X)\big)\Big(\partial_{x_1}u_2(X)\,dx_1 + \dots + \partial_{x_n}u_2(X)\,dx_n\Big)\\ &\quad+ \cdots\\ &\qquad+ a_m\big(U(X)\big)\Big(\partial_{x_1}u_m(X)\,dx_1 + \dots + \partial_{x_n}u_m(X)\,dx_n\Big).\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La 1-forma } \beta \text{ è detta pull-back di } \alpha.\\ \text{Per indicare, il pull-back, si usa spesso la notazione } \beta = \Phi^*\alpha.\end{array}}$$

Osserviamo che β si può scrivere come

$$\beta = b_1(X)\,dx_1 + b_2(X)\,dx_2 + \dots + b_n(X)\,dx_n,$$

dove le funzioni $b_i : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ sono ottenuti dalla formula

$$\begin{pmatrix} b_1(X) \\ \vdots \\ b_m(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}u_1(X) & \dots & \partial_{x_n}u_1(X) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1}u_m(X) & \dots & \partial_{x_n}u_m(X) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(U(X)) \\ \vdots \\ a_n(U(X)) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Lemma 1 (Φ^* è un'applicazione lineare)**.**

(i) *Siano α_1 e α_2 due 1-forme su Ω_2. Allora*

$$\Phi^*(\alpha_1 + \alpha_2) = \Phi^*\alpha_1 + \Phi^*\alpha_2.$$

(ii) *Siano α una 1-forma ed f una funzione su Ω_2. Allora*

$$\Phi^*(f\alpha) = f(\Phi(X))\Phi^*\alpha.$$

Dimostrazione. Segue dalla formula (1). □

Lemma 2. *Siano α_1 e α_2 due 1-forme su Ω_2. Allora*

$$\Phi^*(\alpha_1) \wedge \Phi^*(\alpha_2) = -\Phi^*(\alpha_2) \wedge \Phi^*(\alpha_1).$$

In particolare,

$$\Phi^*(\alpha_1) \wedge \Phi^*(\alpha_1) = 0.$$

Pull-back di k-forme

Siano ora $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ delle 1-forme su Ω_2. Allora, la forma

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \quad \text{è una } k\text{-forma su} \quad \Omega_2.$$

Definiamo la k-forma $\Phi^*\big(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k\big)$ come

$$\Phi^*\big(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k\big) = \big(\Phi^*\alpha_1\big) \wedge \cdots \wedge \big(\Phi^*\alpha_k\big).$$

Più in generale, data una k-forma

$$\alpha = \sum_{j=1}^{N} \alpha_1^j \wedge \alpha_2^j \wedge \cdots \wedge \alpha_k^j\ , \quad \text{dove} \quad \alpha_i^j \quad \text{sono 1-forme su} \quad \Omega_2\ ,$$

definiamo la k-forma $\Phi^*\alpha$ come

$$\Phi^*\alpha = \sum_{j=1}^{N} \big(\Phi^*\alpha_1^j\big) \wedge \cdots \wedge \big(\Phi^*\alpha_k^j\big).$$

Osservazione 3. *Osserviamo che per Lemma 1 e Lemma 2, questa è una buona definizione.*

Esempio 4. *Sia α*

$$\alpha = u^2 v\, du \wedge dv$$

una 2-forma su $\mathbb{R}^2$ e sia Φ la mappa definita come

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\ , \qquad \Phi(x, y) = \big(xy, x\big),$$

allora

$$\Phi^*\alpha = (xy)^2 x\, \big(y\, dx + x\, dy\big) \wedge dx = -x^4 y^2\, dx \wedge dy.$$

Esempio 5. *Sia α*

$$\alpha = du \wedge dv$$

una 2-forma su $\mathbb{R}^2$ e sia $\Phi : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la mappa

$$\Phi(r, \theta) = \big(r\cos\theta\, ,\, r\sin\theta\big),$$

allora

$$\begin{aligned}
\Phi^*\alpha &= \big(\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta\big) \wedge \big(\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta\big) \\
&= r\cos^2\theta\, dr \wedge d\theta - r\sin^2\theta\, d\theta \wedge dr \\
&= r\cos^2\theta\, dr \wedge d\theta + r\sin^2\theta\, dr \wedge d\theta \\
&= r\, dr \wedge d\theta\, .
\end{aligned}$$

Come una conseguenza immediata dalla definizione, abbiamo le due proposizioni seguenti.

Lemma 6. *Siano α_k una k-forma e α_ℓ una ℓ-forma su Ω_2. Allora*

$$\Phi^*(\alpha_k \wedge \alpha_\ell) = \big(\Phi^*\alpha_k\big) \wedge \big(\Phi^*\alpha_\ell\big).$$

Lemma 7. *Siano α_1 e α_2 due k-forme e sia f una funzione su Ω_2. Allora*

$$\Phi^*(f\alpha_1 + \alpha_2) = f(\Phi(X))\, \Phi^*\alpha_1 + \Phi^*\alpha_2.$$

Pull-back di forme esatte e di forme chiuse

In questa sezione dimostreremo il teorema seguente.

Teorema 8. *Siano Ω_1 e Ω_2 due aperti rispettivamente in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$. Sia $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ un'applicazione di classe C^2 e sia α una k-forma di classe C^1 su Ω_2, allora*

$$\Phi^*(d\alpha) = d(\Phi^*\alpha).$$

Cominceremo con due esercizi prelimiari che dimostrano il teorema nel caso $n = m = 2$. Nella sezione successiva daremo una dimostrazione generale.

Esercizio 9. *Siano* Ω_1 *e* Ω_2 *due insiemi aperti in* $\mathbb{R}^2$. *Sia*

$$\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2 \ , \qquad \Phi(x, y) = \big(u(x, y), v(x, y)\big),$$

una funzione di classe C^2. *Sia* $f : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1. *Dimostrare che*

$$\Phi^*\big(df\big) = d\big(f(\Phi)\big).$$

Soluzione. Osservando che

$$f(\Phi(x, y)) = f\big(u(x, y), v(x, y)\big),$$

calcoliamo

$$\begin{aligned}
d\big(\Phi^*\alpha\big) &= d\Big[f\big(u(x, y), v(x, y)\big)\Big] \\
&= \partial_x\Big[f\big(u(x, y), v(x, y)\big)\Big]\,dx + \partial_y\Big[f\big(u(x, y), v(x, y)\big)\Big]\,dy \\
&= \Big(\partial_x u(x, y)\partial_u f\big(u(x, y), v(x, y)\big) + \partial_x v(x, y)\partial_v f\big(u(x, y), v(x, y)\big)\Big)\,dx \\
&\quad + \Big(\partial_y u(x, y)\partial_u f\big(u(x, y), v(x, y)\big) + \partial_y v(x, y)\partial_v f\big(u(x, y), v(x, y)\big)\Big)\,dy \\
&= \partial_u f\big(u(x, y), v(x, y)\big)\Big(\partial_x u(x, y)\,dx + \partial_y u(x, y)\,dy\Big) \\
&\quad + \partial_v f\big(u(x, y), v(x, y)\big)\Big(\partial_x v(x, y)\,dx + \partial_y v(x, y)\,dy\Big) \\
&= \Phi^*\Big(\partial_u f(u, v)\,du + \partial_v f(u, v)\,dv\Big) = \Phi^*(df),
\end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. $\square$

Esercizio 10. *Siano* Ω_1 *e* Ω_2 *due insiemi aperti in* $\mathbb{R}^2$. *Sia*

$$\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2 \ , \qquad \Phi(x, y) = \big(u(x, y), v(x, y)\big),$$

una funzione di classe C^2. *Sia*

$$\alpha = a(u, v)\,du + b(u, v)\,dv$$

una 1*-forma di classe* C^1 *su* Ω_2. *Dimostrare che*

$$\Phi^*\big(d\alpha\big) = d\big(\Phi^*\alpha\big).$$

Soluzione. Supponiamo ora che la forma α sia data da

$$\alpha = a(u, v)\,du + b(u, v)\,dv,$$

dove $a : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ e $b : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ sono funzione di classe C^1. Allora

$$\begin{aligned}
d\Big[\Phi^*\Big(b(u, v)\,dv\Big)\Big] &= d\Big[b\big(u(x, y), v(x, y)\big)\partial_x v(x, y)\,dx + b\big(u(x, y), v(x, y)\big)\partial_y v(x, y)\,dy\Big] \\
&= d\Big[b\big(u(x, y), v(x, y)\big)\partial_x v(x, y)\Big] \wedge dx \\
&\quad + d\Big[b\big(u(x, y), v(x, y)\big)\partial_y v(x, y)\Big] \wedge dy \\
&= \partial_y\Big[b\big(u(x, y), v(x, y)\big)\partial_x v(x, y)\Big]\,dy \wedge dx \\
&\quad + \partial_x\Big[b\big(u(x, y), v(x, y)\big)\partial_y v(x, y)\Big]\,dx \wedge dy \\
&= -\partial_y\Big[b\big(u(x, y), v(x, y)\big)\partial_x v(x, y)\Big]\,dx \wedge dy \\
&\quad + \partial_x\Big[b\big(u(x, y), v(x, y)\big)\partial_y v(x, y)\Big]\,dx \wedge dy
\end{aligned}$$

Ora, siccome $\partial_{yx} v(x,y) = \partial_{xy} v(x,y)$, abbiamo

$$\begin{aligned}
d\Big[\Phi^*\Big(b(u,v)\,dv\Big)\Big] &= -\partial_y\Big[b(u(x,y),v(x,y))\Big]\,\partial_x v(x,y)\,dx\wedge dy + \partial_x\Big[b(u(x,y),v(x,y))\Big]\,\partial_y v(x,y)\,dx\wedge dy\\
&= \Big[-\Big(\partial_y u\,\partial_u b(u,v) + \cancel{\partial_y v\,\partial_v b(u,v)}\Big)\,\partial_x v + \Big(\partial_x u\,\partial_u b(u,v) + \cancel{\partial_x v\,\partial_v b(u,v)}\Big)\,\partial_y v\Big]\,dx\wedge dy\\
&= \partial_u b(u,v)\,\Big[\partial_x u\,\partial_y v - \partial_y u\,\partial_x v\Big]\,dx\wedge dy \qquad \text{(scriviamo solo } u \text{ e } v \text{ al posto di } u(x,y) \text{ e } v(x,y))\\
&= \partial_u b(u,v)\,\Big(\partial_x u\,dx + \partial_y u\,dy\Big)\wedge\Big(\partial_x v\,dx + \partial_y v\,dy\Big)\\
&= \Phi^*\Big(\partial_u b(u,v)\,du\wedge dv\Big).
\end{aligned}$$

Infine, osserviamo che

$$d\Big[b(u,v)\,dv\Big] = \Big(\partial_u b(u,v)\,du + \partial_v b(u,v)\,dv\Big)\wedge dv = \partial_u b(u,v)\,du\wedge dv$$

Il che dimostra l'identità

$$d\Big[\Phi^*\Big(b(u,v)\,dv\Big)\Big] = \Phi^*\Big(d\big[b(u,v)\,dv\big]\Big).$$

Analogamente, si dimostra che

$$d\Big[\Phi^*\big(a(u,v)\,du\big)\Big] = \Phi^*\Big(d\big[a(u,v)\,du\big]\Big).$$

il che conclude la dimostrazione. □

Per dimostrare Teorema 8 nel caso generale avremo bisogno del lemma seguente.

Lemma 11. *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ e siano α una k-forma di classe C^1 e f una funzione di classe C^2 su Ω. Allora*

$$d\Big(df\wedge\alpha\Big) = -df\wedge d\alpha.$$

Dimostrazione: Basta dimostrare il lemma nel caso

$$\alpha = g(x)\,dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}.$$

Infatti,

$$\begin{aligned}
d\Big[df\wedge\alpha\Big] &= d\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n\right)\wedge\Big(g(x)\,dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\Big)\right]\\
&= d\left[\left(g(x)\frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \cdots + g(x)\frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n\right)\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\right]\\
&= \sum_{j=1}^n d\left[g(x)\frac{\partial f}{\partial x_j}\right]\wedge dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\\
&= \sum_{j=1}^n\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g(x)\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)dx_i\right]\wedge dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\\
&= \left[\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\,dx_i\wedge dx_j\right]\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k} + \left[\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n g(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\,dx_i\wedge dx_j\right]\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\\
&= \left[\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\,dx_i\wedge dx_j\right]\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\\
&= dg\wedge df\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k} = -df\wedge d\alpha.
\end{aligned}$$

□

Dimostrazione di Teorema 8. Supponiamo che

$$\alpha = a(U)\,du_{i_1}\wedge\cdots\wedge du_{i_k}.$$

Allora

$$\Phi^*\alpha = a(U(X))\,\left(\frac{\partial u_{i_1}}{\partial x_1}\,dx_1 + \cdots + \frac{\partial u_{i_1}}{\partial x_n}\,dx_n\right)\wedge\cdots\wedge\left(\frac{\partial u_{i_k}}{\partial x_1}\,dx_1 + \cdots + \frac{\partial u_{i_k}}{\partial x_n}\,dx_n\right)$$

Osserviamo che per il lemma precedente

$$d\big(\Phi^*\alpha\big) = d\big(a(U(X))\big) \wedge \left(\frac{\partial u_{i_1}}{\partial x_1}\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial u_{i_1}}{\partial x_n}\, dx_n\right) \wedge \cdots \wedge \left(\frac{\partial u_{i_k}}{\partial x_1}\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial u_{i_k}}{\partial x_n}\, dx_n\right)$$

D'altra parte

$$d\alpha = \Big(\frac{\partial a}{\partial u_1}\, du_1 + \frac{\partial a}{\partial u_2}\, du_2 + \cdots + \frac{\partial a}{\partial u_m}\, du_m\Big) \wedge du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_k}$$

e usando la formula (1), abbiamo

$$\begin{aligned} \Phi^*(d\alpha) &= \Phi^*\Big(\frac{\partial a}{\partial u_1}\, du_1 + \frac{\partial a}{\partial u_2}\, du_2 + \cdots + \frac{\partial a}{\partial u_m}\, du_m\Big) \wedge \Phi^*(du_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \Phi^*(du_{i_k}) \\ &= d\big(a(U(X))\big) \wedge \Phi^*(du_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \Phi^*(du_{i_k}) \\ &= d\Big(\Phi^*\alpha\Big). \end{aligned}$$

□

Corollario 12. *Siano Ω_1 e Ω_2 due aperti rispettivamente in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$. Siano $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ una mappa di classe C^2 e α una k-forma di classe C^1 su Ω_2. Allora:*

(i) *Se α è esatta, allora $\Phi^*\alpha$ è esatta.*
(ii) *Se α è chiusa, allora anche $\Phi^*\alpha$ è chiusa.*