Forme chiuse di ordine superiore su aperti stellati

2-forme chiuse su aperti stellati di $\mathbb{R}^3$

Teorema 1. *Sia Ω un aperto stellato in $\mathbb{R}^3$. Sia*

$$\alpha = a(x,y,z)\,dy\wedge dz + b(x,y,z)\,dz\wedge dx + c(x,y,z)\,dx\wedge dy\,,$$

una 2-forma chiusa di classe C^1 in Ω. Allora α è esatta.

Dimostrazione. Cerchiamo una 1-forma

$$A(x,y,z)dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz,$$

tale che

$$\begin{aligned}
a\,dy\wedge dz + b\,dz\wedge dx + c\,dx\wedge dy &= d\Big(A\,dx + B\,dy + C\,dz\Big)\\
&= dA\wedge dx + dB\wedge dy + dC\wedge dz\\
&= \Big(\partial_y A\,dy + \partial_z A\,dz\Big)\wedge dx\\
&= \Big(\partial_y C - \partial_z B\Big)dy\wedge dz + \Big(\partial_z A - \partial_x C\Big)dz\wedge dx + \Big(\partial_x B - \partial_y A\Big)dx\wedge dy.
\end{aligned}$$

In altri termini cerchiamo tre funzioni A, B e C tali che

$$\begin{cases}\partial_y C - \partial_z B = a\\ \partial_z A - \partial_x C = b\\ \partial_x B - \partial_y A = c\end{cases}$$

Definiamo

$$\begin{aligned}
A(x,y,z) &:= \int_0^1 t\,\Big(z\,b(tx,ty,tz) - y\,c(tx,ty,tz)\Big)\,dt\,,\\
B(x,y,z) &:= \int_0^1 t\,\Big(x\,c(tx,ty,tz) - z\,a(tx,ty,tz)\Big)\,dt\,,\\
C(x,y,z) &:= \int_0^1 t\,\Big(y\,a(tx,ty,tz) - x\,b(tx,ty,tz)\Big)\,dt\,.
\end{aligned}$$

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned}
\partial_y C(x,y,z) - \partial_z B(x,y,z) &= \partial_y \int_0^1 t\,\Big(y\,a(tx,ty,tz) - x\,b(tx,ty,tz)\Big)\,dt\\
&\qquad - \partial_z \int_0^1 t\,\Big(x\,c(tx,ty,tz) - z\,a(tx,ty,tz)\Big)\,dt\\
&= \int_0^1 t\,\Big(y\,t\,\partial_y a(tx,ty,tz) + a(tx,ty,tz) - x\,t\,\partial_y b(tx,ty,tz)\Big)\,dt\\
&\qquad - \int_0^1 t\,\Big(x\,t\,\partial_z c(tx,ty,tz) - a(tx,ty,tz) - z\,t\,\partial_z a(tx,ty,tz)\Big)\,dt\,.
\end{aligned}$$

Siccome per ipotesi

$$\partial_x a + \partial_y b + \partial_z c = 0 \qquad \text{su} \qquad \Omega,$$

otteniamo che

$$\begin{aligned}
\partial_y C(x,y,z) - \partial_z B(x,y,z) &= \int_0^1 t\,\Big(x\,t\,\partial_x a(tx,ty,tz) + y\,t\,\partial_y a(tx,ty,tz) + z\,t\,\partial_z a(tx,ty,tz) + 2a(tx,ty,tz)\Big)\,dt\\
&= \int_0^1 \Big(t^2\,x\,\partial_x a(tx,ty,tz) + t^2\,y\,\partial_y a(tx,ty,tz) + t^2\,z\,\partial_z a(tx,ty,tz) + 2t\,a(tx,ty,tz)\Big)\,dt\\
&= \int_0^1 \partial_t\Big[t^2\,a(tx,ty,tz)\Big]\,dt = a(x,y,z).
\end{aligned}$$

□

In particolare, abbiamo anche ottenuto il teorema seguente.

Teorema: Siano Ω un aperto stellato in $\mathbb{R}^3$ e

$$\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3 \,, \qquad \Phi(x,y,z) = \Big(a(x,y,z),\ b(x,y,z),\ c(x,y,z)\Big)$$

un campo vettoriale di classe C^1 su Ω.
Se il campo Φ è solenoidale, allora Φ è un campo rotore, ovvero:
esiste un campo vettoriale $\Psi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ tale per cui $\nabla \wedge \Psi = \Phi$.

Dimostrazione. Siccome il campo Φ è solenoidale, la 1-forma associata

$$\alpha = a(x,y,z)\, dy \wedge dz + b(x,y,z)\, dz \wedge dx + c(x,y,z)\, dx \wedge dy$$

è chiusa. Per il Teorema 1, abbiamo che α è esatta, ovvero esiste una 1-forma

$$\beta = A(x,y,z)\, dx + B(x,y,z)\, dy + C(x,y,z)\, dz$$

tale che $d\beta = \alpha$. Ma allora, definendo

$$\Psi : \Omega \to \mathbb{R}^3 \,, \qquad \Psi(x,y,z) = \Big(A(x,y,z),\ B(x,y,z),\ C(x,y,z)\Big),$$

si ha che $\nabla \wedge \Psi = \Phi$ in Ω. $\square$

3-forme su aperti stellati di $\mathbb{R}^3$

Teorema 2. *Siano Ω un aperto stellato in $\mathbb{R}^3$ ed α una 3-forma su $\mathcal{R}$. Allora α è esatta.*

Dimostrazione. Possiamo scrivere α come

$$\alpha = F(x,y,z)\, dx \wedge dy \wedge dz\,.$$

Cerchiamo una 2-forma

$$\beta = A(x,y,z)\, dy \wedge dz + B(x,y,z)\, dz \wedge dx + C(x,y,z)\, dx \wedge dy\,,$$

tale che

$$\partial_x A + \partial_y B + \partial_z C = 0 \qquad \text{su} \qquad \Omega\,.$$

Per ogni $(x,y,z) \in \Omega$, definiamo

$$A(x,y,z) := \int_0^1 t^2\, x\, F(tx,ty,tz)\, dt\,,$$

$$B(x,y,z) := \int_0^1 t^2\, y\, F(tx,ty,tz)\, dt\,,$$

$$C(x,y,z) := \int_0^1 t^2\, z\, F(tx,ty,tz)\, dt\,.$$

Allora,

$$\begin{aligned}
&\partial_x A(x,y,z) + \partial_y B(x,y,z) + \partial_z C(x,y,z) \\
&\qquad = \int_0^1 t^2 \Big(3F(tx,ty,tz) + xt\partial_x F(tx,ty,tz) + yt\partial_y F(tx,ty,tz) + zt\partial_z F(tx,ty,tz)\Big)\, dt \\
&\qquad = \int_0^1 \partial_t \Big[t^3 F(tx,ty,tz)\Big]\, dt = F(x,y,z)\,,
\end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. $\square$

Forme differenziali su aperti stellati di $\mathbb{R}^3$

Teorema 3. *Su un aperto stellato $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tutte le forme chiuse sono esatte.*