

## Applicazioni multilineari alternanti e forme differenziali

### APPLICAZIONI MULTILINEARI ALTERNANTI. DEFINIZIONE

**Definizione 1.** Dato un numero naturale  $k \geq 1$  ed uno spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$ , un'applicazione **multilineare** su  $\mathbb{R}^n$ , è una mappa

$$L : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ volte}} \rightarrow \mathbb{R}$$

lineare in ogni variabile, ovvero tale che, per una qualsiasi famiglia

$$X_1, \dots, X_k \in \mathbb{R}^n$$

di  $k$  vettori, si ha:

- fissati un qualsiasi indice  $j = 1, \dots, k$  ed un qualsiasi vettore  $Y_j \in \mathbb{R}^n$ ,

$$L(X_1, X_2, \dots, X_j + Y_j, \dots, X_k) = L(X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_k) + L(X_1, X_2, \dots, Y_j, \dots, X_k);$$

- fissati un qualsiasi indice  $j = 1, \dots, k$  ed un qualsiasi numero reale  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$L(X_1, X_2, \dots, \alpha X_j, \dots, X_k) = \alpha L(X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_k).$$

Diremo che  $L$  è **multilineare alternante** se scambiando una qualsiasi coppia di vettori, il valore di  $L$  cambia segno, ovvero:

- per ogni coppia di indici diversi  $i \neq j \in \{1, \dots, k\}$  si ha che

$$L(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_k) = -L(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_k).$$

### LO SPAZIO DELLE APPLICAZIONI MULTILINEARI ALTERNANTI

**Osservazione 2.** Osserviamo che se

$$L_1 : (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R} \quad e \quad L_2 : (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$$

sono due applicazioni multilineari alternanti, allora anche la somma

$$L_1 + L_2 : (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$$

è multilineare alternante. Se invece

$$L : (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R},$$

è multilineare alternante e  $\alpha \in \mathbb{R}$  è un numero reale, allora anche l'applicazione

$$\alpha L : (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$$

è multilineare alternante. Lo spazio delle applicazioni  $k$ -lineari alternanti su  $\mathbb{R}^n$  è quindi uno spazio vettoriale.

### APPLICAZIONI MULTILINEARI ALTERNANTI E FAMIGLIE DI VETTORI LINEARMENTE DIPENDENTI

**Osservazione 3.** Siano

$$L : (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R},$$

un'applicazione multilineare alternante e

$$X_1, \dots, X_k \in \mathbb{R}^n$$

una famiglia di  $k$  vettori in  $\mathbb{R}^n$ .

- Se esistono due indici  $i \neq j \in \{1, \dots, k\}$  tali che

$$X_i = X_j,$$

allora

$$L(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_k) = 0.$$

- Di conseguenza, se i vettori  $X_1, \dots, X_k$  sono linearmente dipendenti, allora

$$L(X_1, X_2, \dots, X_k) = 0.$$

- In particolare, se  $k > n$ , allora

$$L \equiv 0,$$

ovvero, quando  $k > n$ , l'unica applicazione  $k$ -lineare alternante su  $\mathbb{R}^n$  è quella nulla.

### LE APPLICAZIONI $dx_i \wedge dx_j$

Consideriamo lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$ . Fissati due indici

$$i, j \in \{1, \dots, n\},$$

definiamo l'applicazione

$$dx_i \wedge dx_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

come

$$dx_i \wedge dx_j(A, B) = \det \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{pmatrix}$$

per ogni coppia di vettori

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che:

- $dx_i \wedge dx_i = 0$  ;
- $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$  .

### LE APPLICAZIONI $dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$

Di nuovo, consideriamo lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$ . Fissati tre indici

$$i, j, k \in \{1, \dots, n\},$$

definiamo l'applicazione

$$dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

come

$$dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k(A, B, C) = \det \begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{pmatrix}$$

per ogni tripla di vettori

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che:

- se due fra gli indici  $i, j, k$  sono uguali, allora  $dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k = 0$  ;
- scambiando l'ordine di **esattamente due** fra gli elementi  $dx_i, dx_j$  e  $dx_k$ , l'applicazione cambia segno:

$$dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k = -dx_j \wedge dx_i \wedge dx_k \quad (\text{scambiando il primo ed il secondo}),$$

$$dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k = -dx_k \wedge dx_j \wedge dx_i \quad (\text{scambiando il primo ed il terzo}),$$

$$dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k = -dx_i \wedge dx_k \wedge dx_j \quad (\text{scambiando il secondo ed il terzo}).$$

---

UNA BASE (CANONICA) PER LO SPAZIO DELLE APPLICAZIONI MULTILINEARI ALTERNANTI

Vale il teorema seguente (che lasceremo senza dimostrazione).

**Teorema 4.** Dato lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  ed un numero naturale

$$1 \leq k \leq n$$

ogni applicazione multilineare alternante

$$L : (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$$

si può scrivere in maniera unica come

$$L = \sum a_{i_1, i_2, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

dove  $a_{i_1, i_2, \dots, i_k} \in \mathbb{R}$  sono coefficienti reali e la sommatoria è su tutti gli indici

$$1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_k \leq n.$$


---

FORME DIFFERENZIALI

**Definizione 5.** Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{R}^n$  e  $k$  un numero naturale,

$$1 \leq k \leq n.$$

Una  $k$ -forma differenziale  $\alpha$  su  $\Omega$  è una mappa (una funzione) che ad ogni punto  $X \in \Omega$  associa un'applicazione  $k$ -lineare alternante  $\alpha(X)$  (che a sua volta è una mappa da  $(\mathbb{R}^n)^k$  a valori  $\mathbb{R}$ ).

- Osserviamo che, come corollario di Teorema 4, abbiamo che ogni  $k$ -forma su  $\Omega$  si scrive in maniera unica come

$$\alpha = \sum a_{i_1, i_2, \dots, i_k}(X) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

dove la sommatoria è su tutti gli indici

$$1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_k \leq n,$$

e dove i coefficienti

$$a_{i_1, i_2, \dots, i_k} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

sono funzioni definite su  $\Omega$ .

- Diciamo, inoltre, che la forma  $\alpha$  è di classe  $C^1$  (oppure  $C^2$ ) se tutti i coefficienti

$$a_{i_1, i_2, \dots, i_k} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

sono funzioni di classe  $C^1$  (o rispettivamente  $C^2$ ) su  $\Omega$ .

- Per completezza, si possono definire anche le 0-forme su  $\Omega$ . Precisamente, una 0-forma di classe  $C^1$  su  $\Omega$  è semplicemente una funzione

$$F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

di classe  $C^1$  su  $\Omega$ .

---

OPERAZIONI CON FORME DIFFERENZIALI

**Somma di due forme differenziali (dello stesso ordine).**

Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{R}^n$  e  $k$  un numero naturale,  $1 \leq k \leq n$ . Date due  $k$ -forme  $\alpha$  e  $\beta$  su  $\Omega$ ,

$$\alpha = \sum a_{i_1, i_2, \dots, i_k}(X) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

$$\beta = \sum b_{i_1, i_2, \dots, i_k}(X) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

definiamo la  $k$ -forma  $\alpha + \beta$  su  $\Omega$  come

$$\alpha + \beta = \sum \left( a_{i_1, i_2, \dots, i_k}(X) + b_{i_1, i_2, \dots, i_k}(X) \right) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

**Prodotto di una forma differenziale con una funzione.**

Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{R}^n$  e  $k$  un numero naturale,  $1 \leq k \leq n$ . Date una  $k$ -forme  $\alpha$  su  $\Omega$ ,

$$\alpha = \sum a_{i_1, i_2, \dots, i_k}(X) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

ed una funzione

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

definiamo la  $k$ -forma  $f\alpha$  su  $\Omega$  come

$$f\alpha = \sum \left( f(X) a_{i_1, i_2, \dots, i_k}(X) \right) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} .$$

**PRODOTTO ESTERNO****Prodotto esterno di due 1-forme.**

Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e siano

$$\alpha = a_1(x) dx_1 + a_2(x) dx_2 + a_3(x) dx_3 + \dots + a_n(x) dx_n,$$

$$\beta = b_1(x) dx_1 + b_2(x) dx_2 + b_3(x) dx_3 + \dots + b_n(x) dx_n,$$

due 1-forme su  $\Omega$ . Definiamo la 2-forma  $\alpha \wedge \beta$  come

$$\alpha \wedge \beta := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i(x) b_j(x) dx_i \wedge dx_j.$$

**Prodotto esterno di una  $k$ -forme con una  $l$ -forma.**

Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e siano  $\alpha$  e  $\beta$  rispettivamente una  $k$ -forma ed una  $l$ -forma su  $\Omega$ . Il prodotto esterno  $\alpha \wedge \beta$  si definisce tramite le regole seguenti:

- Se  $\alpha = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  e  $\beta = dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}$ , allora

$$\alpha \wedge \beta = \left( dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \right) \wedge \left( dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l} \right) = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l} .$$

- Se  $f$  e  $g$  sono funzioni,  $\alpha$  è una  $k$ -forma e  $\beta$  è una  $l$ -forma, allora

$$(f(x)\alpha) \wedge (g(x)\beta) = f(x)g(x) \alpha \wedge \beta.$$

Per esempio,

$$(x^2 dy) \wedge (y dx) = x^2 y dy \wedge dx = -x^2 y dx \wedge dy.$$

- Se  $\alpha$  e  $\beta$  sono due  $k$ -forme e  $\gamma$  e  $\delta$  sono  $l$ -forme, allora

$$(\alpha + \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma,$$

$$\alpha \wedge (\gamma + \delta) = \alpha \wedge \gamma + \alpha \wedge \delta.$$

Per esempio,

$$\begin{aligned} (x dx + y dy) \wedge (e^x dx + e^y dy) &= xe^x dx \wedge dx + xe^y dx \wedge dy + ye^x dy \wedge dx + ye^y dy \wedge dy \\ &= xe^y dx \wedge dy + ye^x dy \wedge dx \\ &= xe^y dx \wedge dy - ye^x dx \wedge dy \\ &= (xe^y - ye^x) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2x dx \wedge dy + 3y dy \wedge dz) \wedge (e^x dx + e^y dy) &= 2xe^x (dx \wedge dy) \wedge dx + 2xe^y (dx \wedge dy) \wedge dy \\ &\quad + 3ye^x (dy \wedge dz) \wedge dx + 3ye^y (dy \wedge dz) \wedge dy \\ &= 3ye^x dy \wedge dz \wedge dx \\ &= -3ye^x dy \wedge dx \wedge dz \quad (\text{scambiando } dz \text{ e } dx) \\ &= 3ye^x dx \wedge dy \wedge dz \quad (\text{scambiando } dy \text{ e } dx). \end{aligned}$$

- Osserviamo, inoltre, che vale la regola associativa. Se  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  sono una  $k$ -forma, una  $l$ -forma e una  $m$ -forma su un aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , allora

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

---

 DERIVATA ESTERNA E DIFFERENZIALE

**Definizione 6.** Siano  $\Omega$  un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^n$  ed

$$F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

una funzione di classe  $C^m$  per un qualche  $m \geq 1$ . Definiamo il differenziale di  $F$  come

$$dF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(X) dx_i.$$

Osserviamo che  $dF$  è una 1-forma di classe  $C^{m-1}$  su  $\Omega$ .

Più in generale, data una  $k$ -forma

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 i_2 \dots i_k}(X) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

di classe  $C^m$  su  $\Omega$ , definiamo la derivata esterna di  $\alpha$  come

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} da_{i_1 i_2 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Osserviamo che  $d\alpha$  è una  $(k+1)$ -forma di classe  $C^{m-1}$

---

## ESERCIZI ED ESEMPI DI CALCOLO

**Esercizio 7.** Usando le coordinate  $x, y$  in  $\mathbb{R}^2$ , calcolare

- $d(x^2)$ ;
- $d(xy)$ ;
- $d(ye^x)$ ;
- $d(ydx)$ ;
- $d(xydy)$ ;
- $d(xdy - ydx)$ ;
- $d(xdx + ydy)$ .

**Esercizio 8.** Usando le coordinate  $x, y, z$  in  $\mathbb{R}^3$ , calcolare

- $d(xyz)$ ;
- $d(x^2z)$ ;
- $d(y \sin(z))$ ;
- $d(yzdx)$ ;
- $d(d(xyz))$ .

**Esercizio 9.** Scrivere come

$$a(x, y, z) dx + b(x, y, z) dy + c(x, y, z) dz,$$

oppure come

$$A(x, y, z) dy \wedge dz + B(x, y, z) dz \wedge dx + C(x, y, z) dx \wedge dy,$$

le forme differenziali seguenti.

- (1)  $d\left(\frac{xy}{z}\right)$
- (2)  $d(x - y)$
- (3)  $d(xy - yz + zx)$
- (4)  $d(x - y) \wedge d(y - z)$
- (5)  $d(x + z) \wedge d(x - z)$
- (6)  $d(xy) \wedge d(xz)$
- (7)  $d(zd(xy))$ ;
- (8)  $d(d(xy))$
- (9)  $d(d(x^2 - z^2))$
- (10)  $d(xy) \wedge (ydx - xdy)$ .

**Esercizio 10.** Calcolare

$$d\left(-\frac{1}{y}dx + \frac{1}{x}dy\right).$$

**Esercizio 11.** Calcolare

$$d\left(\frac{-y}{x+y}dx + \frac{x}{x+y}dy\right).$$

**Esercizio 12.** Calcolare

$$d\left(\frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy\right).$$

**Esercizio 13.** Sia  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^1$ . Calcolare

$$d\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\varphi(x^2+y^2)dx + \frac{x}{x^2+y^2}\varphi(x^2+y^2)dy\right).$$

### SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI 7 E 8

**Esercizio 7**

- $d(x^2) = 2x dx$ ;
- $d(xy) = y dx + x dy$ ;
- $d(ye^x) = ye^x dx + e^x dy$ ;
- $d(ydx) = dy \wedge dx = -dx \wedge dy$ ;
- $d(xydy) = d(xy) \wedge dy = (y dx + x dy) \wedge dy = y dx \wedge dy$ ;
- $d(x dy - y dx) = dx \wedge dy - dy \wedge dx = 2 dx \wedge dy$ ;
- $d(x dx + y dy) = dx \wedge dx + dy \wedge dy = 0$ .

**Esercizio 8**

- $d(xyz) = yz dx + xz dy + xy dz$ ;
- $d(x^2z) = 2xz dx + x^2 dz$ ;
- $d(y \sin(z)) = \sin z dy + y \cos z dz$ ;
- $d(yzdx) = d(yz) \wedge dx = (z dy + y dz) \wedge dx = z dy \wedge dx + y dz \wedge dx = -z dx \wedge dy + y dz \wedge dx$ ;
- 

$$\begin{aligned} d(d(xyz)) &= d(yz dx + xz dy + xy dz) \\ &= d(yz) \wedge dx + d(xz) \wedge dy + d(xy) \wedge dz \\ &= (z dy + y dz) \wedge dx + (z dx + x dz) \wedge dy + (x dy + y dx) \wedge dz \\ &= z dy \wedge dx + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy + x dz \wedge dy + x dy \wedge dz + y dx \wedge dz \\ &= 0. \end{aligned}$$