

Principali definizioni, formule e teoremi da sapere

- ★ Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz in \mathbb{R}^n - con dimostrazione.
- ★ Disuguaglianza triangolare in \mathbb{R}^n - con dimostrazione.
- Definizioni: aperti, chiusi, compatti, connessi per archi, parte interna, chiusura e bordo di un insieme (vedi le domande del quiz).
- ★ Teorema: chiuso (=complementare di un aperto) \Leftrightarrow chiuso per successioni - con dimostrazione.
- ★ Teorema: compatto per successioni \Leftrightarrow chiuso e limitato - con dimostrazione.
- ★ Teorema di Weierstrass - una funzione continua su un compatto ammette un massimo e un minimo - con dimostrazione;
- Teorema del valore intermedio su insiemi connessi per archi - con dimostrazione;
- Funzioni derivabili e derivate parziali in un punto - definizione
- Derivate direzionali - definizione: $\partial_V F(X_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(X_0 + tV) - F(X_0)}{t}$, dove $|V| = 1$
- Gradiente e matrice Hessiana - definizione
- Funzioni di classe C^1 e C^2 - definizione - derivabili e continue, con derivate parziali continue.
- ★ Teorema: Le funzioni con gradiente nullo su un aperto connesso sono costanti - con dimostrazione
- ★ Derivate parziali seconde - Teorema di Schwarz - con dimostrazione in dimensione due
- Esempio di una funzione derivabile (in ogni punto), ma non continua
- Funzioni differenziabili - definizione
- Le funzioni differenziabili sono derivabili (il viceversa non è vero - con esempio)
- Le funzioni differenziabili sono continue (il viceversa non è vero - con esempio)
- ★ Teorema del differenziale - se una funzione è derivabile e le sue derivate parziali sono continue, allora la funzione è differenziabile - con dimostrazione in dimensione due
- ★ Formule per la derivazione di una funzione composta - con dimostrazione in dimensione due per una funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ed una curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$
- Corollario: formule per le derivate direzionali di una funzione differenziabile
- Esempio di una funzione continua e derivabile in zero, ma non differenziabile in zero.
- Esempio di una funzione continua che ammette tutte le derivate direzionali (in ogni punto), ma non differenziabile in zero.
- Funzioni 1-omogenee - definizione
- Caratterizzazione delle funzioni 1-omogenee differenziabili in zero - con dimostrazione - mai chiesto all'orale, ma è utile per gli esercizi
- ★ Teorema di Taylor al secondo ordine - con dimostrazione in dimensione due
- Massimi e minimi relativi all'interno di un insieme aperto - condizione al primo ordine

- ★ Teorema: Massimi e minimi relativi - condizioni necessarie e sufficienti al primo ordine in dimensione due - con dimostrazioni. Punti di sella.
- Matrici definite positive/negative e semidefinite positive/negative - definizione ($v \cdot Mv \geq 0$ per ogni vettore v). Metodo per determinare se una matrice simmetrica 2×2 è (semi)definita positiva/negativa in dimensione due - determinante e traccia.
- ★ Teorema della funzione implicita in dimensione due - con dimostrazione
- ★ Teorema dei moltiplicatori di lagrange - con dimostrazione in dimensione due