Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

Lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$

Useremo la notazione seguente :

- $\mathbb{R}^n$ è lo spazio euclideo di dimensione n:

$$\mathbb{R}^n = \Big\{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \ : \ x_k \in \mathbb{R} \quad \text{per ogni} \quad k = 1, \dots, n\Big\}.$$

- $\mathbb{Q}^n$ è l'insieme dei punti con coordiante razionali in $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{Q}^n = \Big\{(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) \ : \ q_k \in \mathbb{Q} \quad \text{per ogni} \quad k = 1, \dots, n\Big\}.$$

- Se x e y sono due punti di $\mathbb{R}^n$ con coordinate

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad \text{e} \qquad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

  allora $X + Y$ e $X - Y$ sono i vettori con coordinate

$$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \qquad \text{e} \qquad X - Y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n).$$

- Se $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, allora definiamo la norma euclidea $|X|$ come

$$|X| := \Big(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2\Big)^{1/2}.$$

- La funzione $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definita come

$$d(X, Y) = |X - Y|,$$

  è una distanza su $\mathbb{R}^n$, ovvero valogono le proprietà seguenti:

  (1) Per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^n$, si ha che $|X - Y| \geq 0$. Inoltre, $|X - Y| = 0$ se e solo se $X = Y$.

  (2) Per ogni $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$, vale la disuguaglianza triangolare

$$|X - Y| + |Y - Z| \geq |X - Z|.$$

- Per ogni $X \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $r > 0$, indichiamo con $B_r(X)$ la palla centrata in X di raggio r.

$$B_r(X) := \Big\{Y \in \mathbb{R}^n \ : \ |X - Y| < r\Big\}.$$

- Per ogni $X \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $r > 0$, indichiamo con $\overline{B}_r(X)$ la palla chiusa centrata in X di raggio r.

$$\overline{B}_r(X) := \Big\{Y \in \mathbb{R}^n \ : \ |X - Y| \leq r\Big\}.$$

  Quando $X = 0$ scriveremo semplicemente B_r e $\overline{B}_r$ al posto di $B_r(0)$ e $\overline{B}_r(0)$.

Le due nozioni di prodotto in $\mathbb{R}^n$.

Per ogni $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e per ogni numero reale $t \in \mathbb{R}$, definiamo il prodotto $tX \in \mathbb{R}^n$ del vettore X con il numero reale t come

$$tX = (tx_1, tx_2, \dots, tx_n).$$

Inoltre, per ogni

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \qquad \text{e} \qquad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

definiamo il prodotto scalare tra x e y come

$$X \cdot Y := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Proposizione 1 (Proprietà del prodotto scalare)**.**

(i) per ogni $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$X \cdot Y = Y \cdot X;$$

(ii) per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha che

$$(tX) \cdot Y = X \cdot (tY) = t(X \cdot Y);$$

(iii) per ogni $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$

$$(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z.$$

(iv) per ogni $X \in \mathbb{R}$ si ha

$$X \cdot X = |X|^2.$$

(v) per ogni $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$|X + Y|^2 = |X|^2 + 2X \cdot Y + |Y|^2.$$

La disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

Teorema 2. *Siano*

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad e \qquad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

due punti di $\mathbb{R}^n$. Allora vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

$$|X||Y| \geq |X \cdot Y|.$$

dove $X \cdot Y$ è il prodotto scalare tra i vettori X e Y.

Dimostrazione. Se $X = 0$ oppure $Y = 0$, abbiamo che

$$|X \cdot Y| = 0 \qquad \text{e} \qquad |X||Y| = 0.$$

Quindi besta considerare il caso $X \neq 0$ e $Y \neq 0$. Definiamo la funzione seguente

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(t) = |X + tY|^2 = |Y|^2 t^2 + 2X \cdot Yt + |X|^2.$$

Siccome $|Y|^2 > 0$, la funzione f ha minimimo nel punto

$$t_{min} = -\frac{X \cdot Y}{|Y|^2}.$$

Sostituendo abbiamo che

$$f(t_{min}) = -\frac{(X \cdot Y)^2}{|Y|^2} + |X|^2.$$

Siccome $f \geq 0$ su $\mathbb{R}$, otteniamo che $(X \cdot Y)^2 \leq |X|^2 |Y|^2$. □

Dimostrazione della disuguaglianza triangolare

Teorema 3. *Siano*

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad e \qquad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

due punti di $\mathbb{R}^n$. *Allora vale la disuguaglianza triangolare*

$$|X| + |Y| \geq |X + Y|.$$

Dimostrazione. Sviluppando $|X + Y|^2$ e usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz abbiamo che

$$|X+Y|^2 = |X|^2 + 2X \cdot Y + |Y|^2 \leq |X|^2 + 2|X||Y| + |Y|^2 = \big(|X| + |Y|\big)^2. \qquad \square$$

Successioni convergenti e limiti di succesioni in $\mathbb{R}^n$

Definizione 4. *Diciamo che la successione* $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge a* $X_\infty \in \mathbb{R}^n$, *se*

$$\lim_{k\to\infty} |X_k - X_\infty| = 0,$$

ovvero se per ogni $\varepsilon > 0$ *esiste* $N \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$|X_k - X_\infty| < \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad k \geq N.$$

Proposizione 5. *Sia* $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una successione in* $\mathbb{R}^n$. *Se* $X_\infty, Y_\infty \in \mathbb{R}^n$ *sono due vettori tali che*

$$\lim_{k\to\infty} |X_k - X_\infty| = 0 \qquad e \qquad \lim_{k\to\infty} |X_k - Y_\infty| = 0,$$

allora $X_\infty = Y_\infty$. *In particolare, se una successione converge, allora il suo limite è unico.*

Dimostrazione. Usando la disuguaglianza triangolare, mostrare che $|X_\infty - Y_\infty| = 0$. $\square$

Proposizione 6. *Siano* $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *e* $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *due successioni in* $\mathbb{R}^n$ *converegnti rispettivamente a* X_∞ *e* $Y_\infty \in \mathbb{R}^n$. *Allora la successione* $X_k + Y_k$ *converge a* $X_\infty + Y_\infty$.

Dimostrazione. Usare la disuguaglianza triangolare. $\square$

Proposizione 7. *Siano* $V \in \mathbb{R}^n$ *un vettore fissato e* $X_k \in \mathbb{R}^n$ *una successione che converge a* $X_\infty \in \mathbb{R}^n$. *Allora,*

$$\lim_{k\to\infty} V \cdot X_k = V \cdot X_\infty.$$

Dimostrazione. Usare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. $\square$

Proposizione 8. *Se* $X_k \in \mathbb{R}^n$ *è una successione che converge a* $X_\infty \in \mathbb{R}^n$, *allora*

$$\lim_{k\to\infty} |X_k| = |X_\infty|.$$

Dimostrazione. Usare la disuguaglianza triangolare. $\square$

Corollario 9. *Se* $X_k \in \mathbb{R}^n$ *è una successione convergente in* $\mathbb{R}^n$, *allora* X_k *è limitata.*

Definizione 10. *Diciamo che una successione* $(X_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{R}^n$ *è limitata se esiste una costante* $R > 0$ *tale che*

$$|X_k| \leq R \quad \text{per ogni} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Proposizione 11. *Sia* $X_k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \in \mathbb{R}^n$ *una successione di vettori in* $\mathbb{R}^n$ *e sia* $X_\infty = (x_1^\infty, x_2^\infty, \dots, x_n^\infty) \in \mathbb{R}^n$ *un vettore fissato. Allora, sono equivalenti:*

(i) X_k *converge a* X_∞ *in* $\mathbb{R}^n$;

(ii) *per ogni fissato* $j = 1, \dots, n$ *la successione* x_j^k *converge (per* $k \to +\infty$*) a* x_j^∞.

Teorema 12 (Bolzano-Weierstrass). *Ogni successione limitata in $\mathbb{R}^n$ ammette una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione in dimensione due. Sia $X_n = (x_n, y_n)$ una successione limitata. Siccome

$$|x_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |X_n| \qquad \text{e} \qquad |y_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |X_n|,$$

abbiamo che anche le successioni di numleri reali $(x_n)_{n\geq 1}$ e $(y_n)_{n\geq 1}$ sono limitate. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass in dimensione 1, la successione $(x_n)_n$ ammette una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ convergente con limite

$$x_\infty := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}.$$

Considerando la successione di vettori

$$X_{n_k} = (x_{n_k}, y_{n_k})$$

abbiamo che:

- la successione delle prime componenti x_{n_k} converge;
- la successione delle seconde componenti y_{n_k} è limitata.

Applicando di nuovo il teorema di Bolzano-Weierstrass, stavolta a y_{n_k}, otteniamo una sottosuccessione $\left(y_{n_{k_j}}\right)_{j\geq 1}$ convergente. Sia y_∞ il limite

$$y_\infty := \lim_{j\to\infty} y_{n_{k_j}}.$$

Consideriamo ora la successione di vettori

$$X_{n_{k_j}} = \left(x_{n_{k_j}},\, y_{n_{k_j}}\right).$$

Abbiamo che

- la successione delle prime componenti $x_{n_{k_j}}$ converge a x_∞ perché è una sottosuccessione della successione x_{n_k} che aveva come limite appunto x_∞;
- la successione delle seconde componenti $y_{n_{k_j}}$ converge a y_∞.

Quindi, ponendo $X_\infty := (x_\infty, y_\infty)$ si ha $X_\infty := \lim_{j\to\infty} X_{n_{k_j}}$. □

Teorema 13. *L'insieme dei vettori con coordinate razionali $\mathbb{Q}^n$ è denso in $\mathbb{R}^n$, ovvero per ogni $X \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un vettore con coordinate razionali $q \in \mathbb{Q}^n$ tale che $|X - q| < \varepsilon$.*

Dimostrazione. Consideriamo il vettore

$$X := (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Siccome $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, per ogni indice $j \in \{1, \dots, n\}$ esiste una successione $(y_j^k)_{k\geq 1}$ di numeri reali tale che

$$x_j = \lim_{k\to\infty} y_j^k.$$

Ma allora la successione

$$Y_k = (y_1^k, y_2^k, \dots, y_n^k) \in \mathbb{Q}^n$$

converge per $k \to \infty$ a X. □

Successioni di Cauchy e completezza di $\mathbb{R}^n$

Definizione 14. *Diciamo che una successione X_k di vettori in $\mathbb{R}^n$ è di Cauchy, se*

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } N > 0 \text{ tale che } |X_i - X_j| < \varepsilon \text{ per ogni } i, j \geq N.$$

Teorema 15 (Completezza di $\mathbb{R}^n$)**.** *Ogni successione di Cauchy in $\mathbb{R}^n$ converge.*

Dimostrazione. Sia

$$X_k = (x_1^k, x_2^k \dots, x_n^k)$$

una successione de Cauchy in $\mathbb{R}^n$. Pre definizione, abbiamo che

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } k > 0 \text{ tale che } |X_i - X_j| < \varepsilon \text{ per ogni } i, j \geq k.$$

Ora, siccome per ogni indice $m \in \{1, \dots, n\}$ fissato abbiamo la disuguaglianza

$$\left|x_m^i - x_m^j\right| \leq |X_i - X_j|,$$

otteniamo che la successione $(x_m^k)_{k \geq 1}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$, ovvero

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } k > 0 \text{ tale che } \left|x_m^i - x_m^j\right| < \varepsilon \text{ per ogni } i, j \geq k.$$

Di conseguenza, siccome $\mathbb{R}$ è completo, abbiamo che la successione $(x_m^k)_{k \geq 1}$ converge ad un qualche $x_m^\infty \in \mathbb{R}$. Allora, il vettore X_∞, definito come

$$X_\infty := \left(x_1^\infty, x_2^\infty, \dots, x_n^\infty\right),$$

è il limite (per $k \to \infty$) della successione X_k in $\mathbb{R}^n$. □

Funzioni continue

Definizione 16. *Siano Ω un iniseme di $\mathbb{R}^n$ e $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione data. Diciamo che la funzione F è continua nel punto $X \in \Omega$, se valgono le seguenti (equivalenti) proprietà:*

- *per ogni successione $X_k \in \Omega$, convergente a X, la successione $F(X_k)$ converge a $F(X)$ in $\mathbb{R}^m$;*
- *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\text{per ogni } Y \in \Omega \text{ tale che } |Y - X| < \delta \text{ si ha } |F(Y) - F(X)| < \varepsilon.$$

Definizione 17. *Diciamo che una funzione $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ è continua su Ω, se lo è in ogni punto $X \in \Omega$.*

Proposizione 18. *Sia Ω un insieme in $\mathbb{R}^n$. Se $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ e $G : \Omega \to \mathbb{R}^m$ sono due funzioni, entrambe continue in un dato punto $X \in \Omega$, allora anche le funzioni*

$$F + G \ : \ \Omega \to \mathbb{R}^m \qquad e \qquad F \cdot G \ : \ \Omega \to \mathbb{R}$$

sono continue in X.

Proposizione 19. *Sia Ω un insieme in $\mathbb{R}^n$. Se $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ è una funzione continua in un dato punto $X \in \Omega$, allora anche la funzione*

$$|F| : \Omega \to \mathbb{R}$$

è continua in X.

Proposizione 20. *Siano Ω un insieme in $\mathbb{R}^n$ ed $F = (f_1, \dots, f_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione data. Sia $X \in \Omega$ un punto dato. Allora, sono equivalenti:*

(i) *la funzione $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ è continua in X;*

(ii) *per ogni $j = 1, \dots, m$ la funzione $f_j : \Omega \to \mathbb{R}$ è continua in X.*

Esercizi teorici

Esercizio 21. *Siano* $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *e* $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *due successioni in* $\mathbb{R}^n$ *converegenti rispettivamente a* X_∞ *e* Y_∞. *Mostrare che*

$$\lim_{k\to\infty} X_k \cdot Y_k = X_\infty \cdot Y_\infty.$$

Esercizio 22. *Siano*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \textit{ed} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

un vettore in $\mathbb{R}^n$ *ed una matrice* $n \times m$ *con coefficienti reali. Mostrare che*

$$|AX| \le \|A\|_2 |X|,$$

dove

$$\|A\|_2 := \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

Esercizio 23. *Siano* $X = (x_1, \dots, x_n)$ *e* $Y = (y_1, \dots, y_n)$ *due vettori in* $\mathbb{R}^n$ *e sia*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

una matrice $n \times n$ *con coefficienti reali. Mostrare che*

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \le |X||Y| \left(\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

Esercizio 24. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

una matrice $n \times m$ *con coefficienti reali. Sia* X_k *una successione di vettori in* $\mathbb{R}^n$ *che converge a* $X_\infty \in \mathbb{R}^n$. *Mostrare che la successione* $Y_k := AX_k$ *converge a* $Y_\infty := AX_\infty$ *in* $\mathbb{R}^m$.

Esercizio 25. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

una matrice $n \times m$ *con coefficienti reali. Supponiamo che esiste un vettore non-nullo* $X \in \mathbb{R}^n$ *tale che*

$$|AX| = \|A\|_2 |X|.$$

Che cosa si può dire sul rango della matrice A*?*

Esercizio 26. *Siano* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *e* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *due funzioni Riemann integrabili. Dimostrare che*

$$\left| \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx \right| \le \left(\int_0^1 f^2(x)\, dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 g^2(x)\, dx \right)^{1/2}$$

Esercizio 27. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

una matrice $n \times n$ con coefficienti reali, simmetrica[1] *e semi-definita positiva*[2].

(1) *Mostrare che se per un qualche vettore $X \in \mathbb{R}^n$ vale $X^t A X = 0$, allora $AX = 0$. (Mostrare per esempio che $Y^t A X = 0$ per ogni $Y \in \mathbb{R}^n$.)*

(2) *Mostrare che vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz*

$$|Y^t A X| \leq (X^t A X)^{1/2} (Y^t A Y)^{1/2} \qquad \text{per ogni} \qquad X, Y \in \mathbb{R}^n.$$

Esercizio 28. *Sia B_r la palla di raggio r e centro l'origine in $\mathbb{R}^n$. Trovare il più grande cubo*

$$Q_\ell = (-\ell, \ell)^n$$

di lato $\ell > 0$ (e centro l'origine) contenuto in B_r.

Esercizio 29. *Siano X e Y due punti di $\mathbb{R}^n$ e siano $R > r > 0$ due costanti reali. Mostrare che*

$$\text{se} \quad |X - Y| < R - r\,, \quad \text{allora} \quad B_r(Y) \subset B_R(X)\,.$$

Esercizio 30. *Siano X e Y due vettori di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che*

$$|X - Y|^2 + |X + Y|^2 = 2\big(|X|^2 + |Y|^2\big).$$

[1] Una matrice A è simmetrica se $Y^t A X = X^t A Y$ per ogni coppia di vettori $X, Y \in \mathbb{R}^n$.

[2] Una matrice A è semi-definita positiva se $X^t A X \geq 0$ per ogni $X \in \mathbb{R}^n$.