Equazioni differenziali ordinarie in coordinate polari

Sistemi in coordinate polari

Lemma 1. *Siano $x : [0,T) \to \mathbb{R}$ e $y : [0,T) \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Supponiamo che eistono due funzioni derivabili*

$$r : [0,T) \to (0,+\infty) \qquad e \qquad \theta : [0,T) \to (0,2\pi),$$

tali che, per ogni $t \in [0,T)$,

$$x(t) = r(t)\cos\big(\theta(t)\big) \qquad e \qquad y(t) = r(t)\sin\big(\theta(t)\big).$$

Allora,

$$\begin{cases} x' = r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta \\ y' = r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta. \end{cases}$$

In particolare, se

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} \qquad e \qquad G : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$$

sono due funzioni date, allora sono equivalenti

(1) *per ogni $t \in [0,T)$*

$$\begin{cases} x'(t) = F\big(x(t), y(t)\big) \\ y'(t) = G\big(x(t), y(t)\big); \end{cases}$$

(2) *per ogni $t \in [0,T)$*

$$\begin{cases} r' = \big(\cos\theta, \sin\theta\big) \cdot \Big(F\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big), G\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big)\Big) \\ \theta' = \dfrac{1}{r}\big(-\sin\theta, \cos\theta\big) \cdot \Big(F\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big), G\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big)\Big). \end{cases}$$

Dimostrazione. Possiamo scrivere (1) come

$$\begin{cases} x' = r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta = F(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ y' = r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta = G(r\cos\theta, r\sin\theta), \end{cases}$$

il che è equivalente a

$$\begin{cases} r' = \cos\theta\, F\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big) + \sin\theta\, G\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big) \\ \theta' = \dfrac{1}{r}\Big(-\sin\theta\, F\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big) + \cos\theta\, G\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big)\Big). \end{cases}$$

□

Teorema 2. *Siano*

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} \qquad e \qquad G : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$$

due funzioni localmente lipchitziane su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Siano $T > 0$ e

$$x : [0,T) \to \mathbb{R} \qquad e \qquad y : [0,T) \to \mathbb{R}$$

due funzioni derivabili, soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x'(t) = F\big(x(t), y(t)\big) \\ y'(t) = G\big(x(t), y(t)\big) \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

e tali che

$$x^2(t) + y^2(t) > 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad t \in [0, T).$$

Scriviamo il dato iniziale (x_0, y_0) *in coordinate polari come*

$$x_0 = r_0 \cos\theta_0 \ , \qquad x_0 = r_0 \sin\theta_0 \ ,$$

per un qualche $r_0 > 0$ *e* $\theta_0 \in \mathbb{R}$*. Allora, esistono due funzioni derivabili*

$$r : [0, T) \to (0, +\infty) \qquad e \qquad \theta : [0, T) \to (0, 2\pi),$$

soluzioni del sistema

$$\begin{cases} r' = \big(\cos\theta, \sin\theta\big) \cdot \Big(F\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big), G\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big)\Big) \\ \theta' = \dfrac{1}{r}\big(-\sin\theta, \cos\theta\big) \cdot \Big(F\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big), G\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big)\Big) \\ r(0) = r_0,\ \theta(0) = \theta_0, \end{cases}$$

e tali che

$$x(t) = r(t)\cos\big(\theta(t)\big) \qquad e \qquad y(t) = r(t)\sin\big(\theta(t)\big).$$

Dimostrazione. Per il teorema di Cauchy-Lipschitz esiste una soluzione

$$r : [0, T_{max}) \to (0, +\infty) \qquad \text{e} \qquad \theta : [0, T_{max}) \to (0, 2\pi),$$

del sistema

$$\begin{cases} r' = \big(\cos\theta, \sin\theta\big) \cdot \Big(F\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big), G\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big)\Big) \\ \theta' = \dfrac{1}{r}\big(-\sin\theta, \cos\theta\big) \cdot \Big(F\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big), G\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big)\Big) \\ r(0) = r_0,\ \theta(0) = \theta_0, \end{cases}$$

dove T_{max} è il tempo massimale di esistenza della soluzione. Per il Lemma 1, abbiamo che la funzione

$$(\widetilde{x}, \widetilde{y}) : [0, T_{max}) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ , \quad \big(\widetilde{x}(t), \widetilde{y}(t)\big) = \Big(r(t)\cos\big(\theta(t)\big)\ ,\ r(t)\sin\big(\theta(t)\big)\Big) \ .$$

è soluzione del sistema

$$\begin{cases} \widetilde{x}'(t) = F\big(\widetilde{x}(t), \widetilde{y}(t)\big) & \text{per ogni} \quad t \in [0, T_{max}), \\ \widetilde{y}'(t) = G\big(\widetilde{x}(t), \widetilde{y}(t)\big) & \text{per ogni} \quad t \in [0, T_{max}), \\ \widetilde{x}(0) = x_0,\ \widetilde{y}(0) = y_0, \end{cases}$$

Per l'unicità della soluzione, abbiamo che

$$\widetilde{x}(t) = x(t) \qquad \text{e} \qquad \widetilde{y}(t) = y(t),$$

per ogni $t \in \big[0, \min\{T, T_{max}\}\big)$. Quindi, basta dimostrare che $T_{max} \geq T$. Supponiamo, par assurdo, che

$$T_{max} < T.$$

Siccome

$$K = \Big\{(x(t), y(t)) \ : \ t \in \big[0, T_{max}\big)\Big\},$$

è un compatto strettamente contenuto in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, abbiamo che esiste una costante $M > 1$ tale che

$$\frac{1}{M} \leq r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq M \quad \text{per ogni} \quad (x,y) \in K.$$

Di conseguenza, l'unica possibilità per avere $T_{max} < +\infty$ è avere una successione di tempi

$$t_n \in \big[0, T_{max}\big) \ , \qquad t_n \to T_{max}$$

tale che

$$\lim_{n \to +\infty} \theta(t_n) = \pm\infty. \tag{1}$$

D'altra parte, usando di nuovo la compattezza di K, abbiamo che esiste una costante $C > 0$ tale per cui

$$\frac{\big|\big(F(x,y), G(x,y)\big)\big|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq C \quad \text{per ogni} \quad (x,y) \in M.$$

Quindi

$$-C \leq \theta'(t) \leq C \quad \text{per ogni} \quad t_n \in \big[0, T_{max}\big).$$

e di conseguenza,

$$\theta_0 - CT_{max} \leq \theta(t) \leq \theta_0 + CT_{max} \quad \text{per ogni} \quad t_n \in \big[0, T_{max}\big),$$

il che è in contraddizione con (1). In conclusione, $T_{max} \geq T$. □

Esercizi

Esercizio 3. *Considerare il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = -x - y \\ y' = x - y \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

dove $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

(i) *Scrivere il sistema in coordinate polari.*

(ii) *Trovare la soluzione in coordinate polari in funzione del dato iniziale.*

(iii) *Tracciare la traiettoria approssimativa della soluzione.*

(iv) *Mostrare che per ogni dato iniziale la soluzione* $\big(x(t), y(t)\big)$ *converge a* $(0,0)$.

Esercizio 4. *Considerare il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = -y - x\big(x^2 + y^2\big) \\ y' = x - y\big(x^2 + y^2\big) \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

dove $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

(i) *Scrivere il sistema in coordinate polari.*

(ii) *Trovare la soluzione in coordinate polari in funzione del dato iniziale.*

(iii) *Tracciare la traiettoria approssimativa della soluzione.*

(iv) *Mostrare che per ogni dato iniziale la soluzione* $\big(x(t), y(t)\big)$ *converge a* $(0,0)$.

Esercizio 5. *Considerare il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = x\big(x^2+y^2\big) - x - y \\ y' = y\big(x^2+y^2\big) + x - y \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

dove $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

(i) *Scrivere il sistema in coordinate polari.*

(ii) *Dire per quali valori del dato iniziale* (x_0, y_0) *la soluzione è periodica.*

(iii) *Tracciare la traiettoria approssimativa della soluzione in funzione del dato iniziale.*

Esercizio 6. *Considerare il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = x\big(x^2+y^2\big)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - y \\ y' = y\big(x^2+y^2\big)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + x \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

dove $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

(i) *Scrivere il sistema in coordinate polari.*

(ii) *Dire per quali valori del dato iniziale* (x_0, y_0) *la soluzione è periodica.*

(iii) *Per quali valori del dato iniziale la soluzione è limitata?*

(iv) *Tracciare la traiettoria approssimativa della soluzione in funzione del dato iniziale.*