Curve rettificabili

Date una curva
$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d,$$
ed una partizione
$$\mathcal{P} = \Big\{a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\Big\}$$
dell'intervallo $[a, b]$, definiamo
$$L(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \big|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\big|.$$

Lemma 1. *Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ una curva continua e siano $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ due partizioni di $[a, b]$. Se la patizione $\mathcal{Q}$ è più fine di $\mathcal{P}$ ($\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$), allora $L(\mathcal{Q}) \geq L(\mathcal{P})$.*

Definizione 2. *Diciamo che una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ è rettificabile, se l'insieme*
$$\big\{L(\mathcal{P}) \ : \ \mathcal{P} \ \text{ è una partizione di } \ [a, b]\big\}$$
è limitato superiormente. Se questo è il caso, la lunghezza della curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ è data da
$$L(\gamma; [a, b]) = \sup\big\{L(\mathcal{P}) \ : \ \mathcal{P} \ \text{ è una partizione di } \ [a, b]\big\}.$$

Teorema 3. *Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ una curva di classe C^1 su $[a, b]$ (ovverlo le componenti di γ sono funzioni reali di classe C^1 su $[a, b]$). Allora, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ è rettificabile e*
$$L(\gamma; [a, b]) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

Dimostrazione. Supponiamo che $d = 2$ e che
$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big),$$
dove x e y sono funzioni di classe C^1 su $[a, b]$. Allora, la funzione
$$|\gamma'| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} : [a, b] \to \mathbb{R}$$
è una funzione continua e quindi Riemann integrabile su $[a, b]$. In particolare, vale il seguente lemma.

Lemma 1: Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $\mathcal{P}_{int}$ tale che per ogni partizione
$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$$
più fine di $\mathcal{P}_{int}$ si ha
$$S(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P}) < \varepsilon,$$
dove $S(\mathcal{P})$ e $s(\mathcal{P})$ sono le somme di Riemann
$$S(\mathcal{P}) := \sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1}) \max_{t\in[t_{j-1},t_j]} |\gamma'(t)| \qquad \text{e} \qquad s(\mathcal{P}) := \sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1}) \min_{t\in[t_{j-1},t_j]} |\gamma'(t)| \ .$$
In particolare, per ogni scelta di punti
$$z_j \in (t_{j-1}, t_j) \quad \text{per} \quad j = 1, \ldots, n,$$
si ha che
$$\Big| \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt - \sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1})\big|\gamma'(z_j)\big| \Big| < \varepsilon.$$

Calcolo di $L(\mathcal{P})$. Sia

$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$$

una partizione di $[a, b]$. Per il teorema di Lagrange, per ogni $1 \leq k \leq n$, esistono punti z_k e w_k tali che

$$t_{k-1} < z_k < t_k \qquad \text{e} \qquad x'(z_k) = \frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}},$$

$$t_{k-1} < w_k < t_k \qquad \text{e} \qquad y'(w_k) = \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}.$$

Ora calcoliamo $L(\mathcal{P})$

$$\begin{aligned}
L(\mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big(x(t_k) - x(t_{k-1})\big)^2 + \big(y(t_k) - y(t_{k-1})\big)^2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x'(z_k))^2 (t_k - t_{k-1})^2 + (y'(w_k))^2 (t_k - t_{k-1})^2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \sqrt{(x'(z_k))^2 + (y'(w_k))^2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \sqrt{(x'(z_k))^2 + (y'(z_k))^2} \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \Big(\sqrt{(x'(z_k))^2 + (y'(w_k))^2} - \sqrt{(x'(z_k))^2 + (y'(z_k))^2} \Big)
\end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\Big| L(\mathcal{P}) - \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) |\gamma'(z_k)| \Big| \leq \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \Big| \sqrt{(x'(z_k))^2 + (y'(w_k))^2} - \sqrt{(x'(z_k))^2 + (y'(z_k))^2} \Big|$$

Ora, stimiamo la sommatoria a destra

$$\begin{aligned}
&\Big| \sqrt{(x'(z_k))^2 + (y'(w_k))^2} - \sqrt{(x'(z_k))^2 + (y'(z_k))^2} \Big| \\
&\qquad = \frac{\Big| \Big((x'(z_k))^2 + (y'(w_k))^2 \Big) - \Big((x'(z_k))^2 + (y'(z_k))^2 \Big) \Big|}{\sqrt{(x'(z_k))^2 + (y'(w_k))^2} + \sqrt{(x'(z_k))^2 + (y'(z_k))^2}} \\
&\qquad = \frac{\Big| (y'(w_k))^2 - (y'(z_k))^2 \Big|}{\sqrt{(x'(z_k))^2 + (y'(w_k))^2} + \sqrt{(x'(z_k))^2 + (y'(z_k))^2}} \\
&\qquad \leq \frac{\Big| (y'(w_k))^2 - (y'(z_k))^2 \Big|}{\sqrt{(y'(w_k))^2} + \sqrt{(y'(z_k))^2}} \leq \big| |y'|(w_k) - |y'|(z_k) \big|.
\end{aligned}$$

Siccome $|y'| : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua su $[a, b]$, abbiamo che

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

se $s, t \in [a, b]$ sono tale che $|s - t| \leq \delta$, allora $\big| |y'|(s) - |y'|(t) \big| \leq \varepsilon$.

Lemma 2: Fissati $\varepsilon > 0$ ed una partizione $\mathcal{P}$ di $[a, b]$, esiste una partizione $\mathcal{Q}$ più fine di $\mathcal{P}$ e tale che

$$\left| L(\mathcal{Q}) - \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt \right| \leq (1 + b - a)\varepsilon.$$

Dimostrazione: Scegliamo $\delta > 0$ tale che $\big||y'|(s) - |y'|(t)\big| \leq \varepsilon$ per ogni coppia di punti s, t a distanza $\leq \delta$. Sia $\mathcal{P}_{cont}$ una qualsiasi partizione in intervalli di lunghezza $\leq \varepsilon$. Sia $\mathcal{P}_{int}$ la partizione data dal Lemma 1. Sia

$$\mathcal{Q} = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b\}$$

una qualsiasi partizione più fine di $\mathcal{P}_{cont}$, $\mathcal{P}_{int}$ e della partizione data $\mathcal{P}$. Allora,

$$\begin{aligned} \left| L(\mathcal{Q}) - \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt \right| &\leq \Big| \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})|\gamma'(z_k)| - \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt \Big| \\ &\quad + \Big| L(\mathcal{Q}) - \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})|\gamma'(z_k)| \Big| \\ &\leq \varepsilon + \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \big| |y'(z_k)| - |y'(w_k)| \big| \\ &\leq \varepsilon + \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})\varepsilon = (1 + b - a)\varepsilon, \end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione di Lemma 2. □

Fissiamo ora una partizione qualsiasi $\mathcal{P}$. Per il Lemma 2, esiste una partizione $\mathcal{Q}$ piu fine di $\mathcal{P}$ tale che

$$L(\mathcal{P}) \leq L(\mathcal{Q}) \leq \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt + \varepsilon(1 + b - a).$$

Siccome ε è arbitrario, abbiamo che

$$L(\mathcal{P}) \leq \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

Di conseguenza, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ ha lunghezza finita e

$$\text{lunghezza}(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

Inoltre, usando di nuovo Lemma 2, abbiamo che esiste una successione di partizioni $\mathcal{Q}_n$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} L(\mathcal{Q}_n) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

e di conseguenza

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt \leq \sup\Big\{ L(\mathcal{Q}) \ :\ \mathcal{Q}\ -\ \text{partizione di } [a, b] \Big\}.$$

Si ha quindi che

$$\text{lunghezza}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt,$$

il che conclude la dimostrazione del teorema. □

Corollario 4 (La lunghezza di un arco di cerchio)**.** *Consideriamo la curva* $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. *Allora, per ogni* $\theta > 0$

$$L(\gamma; [0, \theta]) = \theta.$$

In particolare, $L(\gamma; [0, 2\pi]) = 2\pi$.