Esercizi

Esercizio 1. *Sia $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una funzione limitata e di classe C^1. Dimostrare che, per ogni $X_0 \in \mathbb{R}^d$, l'intervallo massimale di esistenza per il problema*

$$X' = F(X), \quad X(0) = X_0$$

è $\mathcal{I}_{max} = [0, +\infty)$.

Esercizio 2. *Sia $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una funzione di classe C^1 tale che*

$$|F(X)| \leq 7|X| \quad \textit{per ogni} \quad X \in \mathbb{R}^d.$$

Dimostrare che, per ogni $X_0 \in \mathbb{R}^d$, l'intervallo massimale di esistenza per il problema

$$X' = F(X), \quad X(0) = X_0$$

è $\mathcal{I}_{max} = [0, +\infty)$.

Esercizio 3. *Sia $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una funzione di classe C^1 tale che*

$$X \cdot F(X) \leq 0 \quad \textit{per ogni} \quad X \in \mathbb{R}^d.$$

Dimostrare che, per ogni $X_0 \in \mathbb{R}^d$, l'intervallo massimale di esistenza per il problema

$$X' = F(X), \quad X(0) = X_0$$

è $\mathcal{I}_{max} = [0, +\infty)$.

Esercizio 4. *Mostrare che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, l'intervallo massimale di esistenza per il problema*

$$\begin{cases} x'(t) = \sin(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

è $\mathcal{I}_{max} = [0, +\infty)$.

Esercizio 5. *Mostrare che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, l'intervallo massimale di esistenza per il problema*

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t)\sin(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

è $\mathcal{I}_{max} = [0, +\infty)$.

Esercizio 6. *Sia $x_0 \in [0, 1]$.*

(a) Mostrare che l'intervallo massimale di esistenza per il problema

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) - x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

è $\mathcal{I}_{max} = [0, +\infty)$.

(b) Mostrare che esiste il limite

$$\lim_{t\to+\infty} x(t)$$

e calcolarlo in funzione di $x_0 \in [0,1]$.

Esercizio 7. *Sia* $x_0 \in (-\infty, 1]$.

(a) Mostrare che l'intervallo massimale di esistenza per il problema

$$\begin{cases} x'(t) = x^3(t) - x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

è $\mathcal{I}_{max} = [0, +\infty)$.

(b) Mostrare che esiste il limite

$$\lim_{t\to+\infty} x(t)$$

e calcolarlo in funzione di $x_0 \in [0,1]$.

Esercizio 8. *Sia* $x_0 \in [-1, 1]$.

(a) Mostrare che l'intervallo massimale di esistenza per il problema

$$\begin{cases} x'(t) = \sin(x(t))\big(x^3(t) - x(t)\big) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

è $\mathcal{I}_{max} = [0, +\infty)$.

(b) Mostrare che esiste il limite

$$\lim_{t\to+\infty} x(t)$$

e calcolarlo in funzione di $x_0 \in [0,1]$.

Esercizio 9.

(a) Mostrare che l'intervallo massimale di esistenza per il problema

$$\begin{cases} x'(t) = x^4(t) - (\sin(x(t)) + 1)x^2(t) + \sin(x(t)) \\ x(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

è $\mathcal{I}_{max} = [0, +\infty)$.

(b) Provarte che $|x(t)| < 1$ *per ogni* $t > 0$.

(c) Calcolare il limite $\lim\limits_{x\to+\infty} x(t)$.

Esercizio 10. *Sia* $\mathcal{E} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^2 *con la proprietà seguente:*

$$\textit{per ogni} \quad c \in \mathbb{R} \quad \textit{l'insieme} \quad \{\mathcal{E} \le c\} \quad \textit{è compatto.}$$

(a) *Dimostrare che per ogni* $X_0 \in \mathbb{R}^d$ *l'intervallo massimale di esistenza di*

$$X' = -\nabla\mathcal{E}(X)\,, \qquad X(0) = X_0$$

è $[0, +\infty)$.

(b) *Mostrare che la funzione* $t \mapsto \mathcal{E}(X(t))$ *è monotona decrescente.*

Esercizio 11. *Sia* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1. *Mostrare che per ogni* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *l'intervallo massimale di esistenza della soluzione del sistema*

$$\begin{cases} x' = -y\, g(x,y) \\ y' = x\, g(x,y) \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

è l'intervallo $[0, +\infty)$.

Esercizio 12. *Sia* $\big(x(t), y(t)\big)$ *la soluzione del sistema*

$$\begin{cases} x' = y - xy \\ y' = x + x^2 \\ x(0) = \frac{1}{2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. *Mostrare che l'intervallo massimale di esistenza è* $[0, +\infty)$.
2. *Mostrare che* $x(t) \le 1$ *per ogni* t
3. *Mostrare che* $y(t) \ge 0$ *per ogni* t.
4. *Mostrare che* $x(t)$ *e* $y(t)$ *sono funzioni monotone crescenti.*
5. *Mostrare che*
$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1 \qquad e \qquad \lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty.$$

Esercizio 13. *Si consideri la soluzione* $\big(x(t), y(t)\big)$ *del sistema*

$$\begin{cases} x' = 3y\, e^x \sin(xy) \\ y' = 5x\, e^y \sin(xy) \\ x(0) = 2 \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1. *Mostrare che* $x(t) > 0$ *e* $y(t) > 0$ *per ogni* t.
2. *Mostrare che* $x(t)y(t) \le \pi$ *per ogni* t.
3. *Mostrare che* $2 \le x(t) \le 2\pi$ *e* $\dfrac{1}{2} \le y(t) \le \dfrac{\pi}{2}$ *per ogni* t.
4. *Mostrare che l'intervallo massimale di esistenza è* $[0, +\infty)$.
5. *Mostrare che le funzioni*
$$t \mapsto x(t), \qquad t \mapsto y(t), \qquad t \mapsto x(t)y(t)$$
sono monotone crescenti e
$$\lim_{t\to+\infty} x(t)y(t) = \pi.$$

Esercizio 14. *Si consideri la soluzione* $\big(x(t), y(t)\big)$ *del sistema*

$$\begin{cases} x' = e^{xy} \cos x \\ y' = e^{x+y} \cos y \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. *Mostrare che per ogni* t *(nell'intervallo massimale di esistenza)*
$$-\frac{\pi}{2} \le x(t) \le \frac{\pi}{2} \qquad e \qquad -\frac{\pi}{2} \le x(t) \le \frac{\pi}{2} \ .$$
2. *Mostrare che le funzioni* x *e* y *sono crescenti e che per ogni* t
$$1 \le x(t) \le \frac{\pi}{2} \qquad e \qquad 1 \le x(t) \le \frac{\pi}{2} \ .$$
3. *Mostrare che* $1 \le x(t) \le \frac{\pi}{2}$ *e* $1 \le y(t) \le \frac{\pi}{2}$ *per ogni* t.
4. *Mostrare che l'intervallo massimale di esistenza è* $[0, +\infty)$.
5. *Mostrare che la funzioni* $t \mapsto x(t)$ *e* $t \mapsto (t)$ *sono crescenti e*
$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \frac{\pi}{2} \qquad e \qquad \lim_{t\to+\infty} y(t) = \frac{\pi}{2}.$$