La funzione esponenziale

Lemma 1. *Siano $T > 0$ una costante e $x : (-T, T) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su $(-T, T)$ e tale che*

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \quad \textit{per ogni} \quad t \in (-T, T) \\ x(0) = 1. \end{cases} .$$

Allora,

$$x(t) > 0 \quad \textit{per ogni} \quad t \in (-T, T).$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima che $x(t) > 0$ per $t \in (0, T)$. Supponiamo per assurdo che x si annulla in $(0, T)$. Allora, esiste l'estremo inferiore

$$S = \inf \Big\{ s \in (0, T) \ : \ x(s) = 0 \Big\}.$$

Per la continuità di x, $x(S) = 0$ (in particolare, $S > 0$). Inoltre, per la definizione di estremo inferiore, abbiamo che

$$x(s) > 0 \quad \text{per ogni} \quad s \in [0, S).$$

S'altra parte, per il teorema di Lagrange, possiamo trovare $c \in (0, S)$ tale che

$$x'(c) = \frac{x(S) - x(0)}{S - 0} = \frac{x(S) - 1}{S} < 0,$$

il che è un assurdo.

Dimostriamo ora che $x(t) > 0$ per $t \in (-T, 0)$. Supponiamo per assurdo che x si annulla in $(-T, 0)$. Allora, esiste l'estremo superiore

$$S = \sup \Big\{ t \in (-T, 0) \ : \ x(t) = 0 \Big\}.$$

Allora, abbiamo che

$$x(S) = 0 \quad \text{e} \quad x(t) > 0 \quad \text{per ogni} \quad t > S.$$

Definiamo ora

$$s = \frac{1}{2} S.$$

Per ogni $t \in (s, |s|)$, abbiamo che $x(t)$ e $x(t + s)$ sono positivi. Consideriamo, la funzione

$$u : (s, |s|) \to \mathbb{R} \ , \qquad u(t) = \frac{x(s)x(t)}{x(t + s)}.$$

Allora,

$$u'(t) = \frac{x(s)x'(t)x(t + s) - x(s)x(t)x'(t + s)}{x(t + s)^2} = \frac{x(s)x(t)x(t + s) - x(s)x(t)x(t + s)}{x(t + s)^2} = 0.$$

La funzione $u(t)$ è quindi costante sull'intervallo $(s, |s|)$ e quindi

$$x(t + s) = x(t)x(s) \quad \text{per ogni} \quad t \in (s, |s|).$$

Consideriamo ora una successione $t_n \in (s, |s|)$ rale che $t_n \to s$. Per la continuità di $x : (-T, T) \to \mathbb{R}$ abbiamo che

$$\lim_{n \to \infty} x(t_n + s) = x(2s) = x(S) = 0.$$

D'altra parte,

$$\lim_{n \to \infty} x(t_n)x(s) = x(s)^2 > 0,$$

il che è un assurdo. $\square$

Lemma 2. *Siano $T > 0$ una costante e $x : (-T, T) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e positiva su $(-T, T)$ e tale che*

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \quad \textit{per ogni} \quad t \in (-T, T)\,, \\ x(0) = 1\,. \end{cases} .$$

Allora, esiste una funzione $y : (-2T, 2T) \to \mathbb{R}$ derivabile su $(-2T, 2T)$ e tale che

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) \quad \textit{per ogni} \quad t \in (-2T, 2T)\,, \\ y(t) = x(t) \quad \textit{per ogni} \quad t \in (-T, T)\,. \end{cases} .$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$y_1 : (0, 2T) \to \mathbb{R}\,, \qquad y_1(t) = \frac{x\big(T/2\big)}{x\big(-T/2\big)}\, x\big(t - T\big).$$

Osserviamo che

$$y_1\big(T/2\big) = x\big(T/2\big)$$

e che per ogni $t \in (0, T)$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{x\big(T/2\big)}{x\big(-T/2\big)}\,\frac{x\big(t-T\big)}{x(t)}\right] = \frac{x\big(T/2\big)}{x\big(-T/2\big)}\,\frac{x'(t-T)x(t) - x(t-T)x'(t)}{x(t)^2} = 0.$$

Di conseguenza,

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) \quad \text{per ogni} \quad t \in (0, 2T), \\ x(t) = y_1(t) \quad \text{per ogni} \quad t \in (0, T). \end{cases}$$

Analogamente definendo

$$y_2 : (-2T, 0) \to \mathbb{R}\,, \qquad y_2(t) = \frac{x\big(-T/2\big)}{x\big(T/2\big)}\, x\big(t + T\big),$$

abbiamo che

$$\begin{cases} y_2'(t) = y_2(t) \quad \text{per ogni} \quad t \in (-2T, 0), \\ x(t) = y_2(t) \quad \text{per ogni} \quad t \in (-T, 0). \end{cases}$$

Di conseguenza, basta definire

$$y : (-2T, 2T) \to \mathbb{R}\,, \qquad y(t) := \begin{cases} y_1(t) \quad \text{per} \quad t \in (0, 2T); \\ x(t) \quad \text{per} \quad t \in (-T, T); \\ y_2(t) \quad \text{per} \quad t \in (-2T, 0). \end{cases}$$

□

Teorema 3. *Esiste un'unica funzione derivabile $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \quad \textit{per ogni} \quad t \in \mathbb{R} \\ x(0) = 1. \end{cases} .$$

Inoltre,

(i) $x(t) > 0$ *per ogni* $t \in \mathbb{R}$ *;*

(ii) $x(t + s) = x(t)x(s)$ *per ogni* $t, s \in \mathbb{R}$ *.*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \qquad F(x) = x.$$

Allora, F è 1-Lipschitziana su $\mathbb{R}$. Infatti

$$|F(x) - F(y)| = |x - y| \quad \text{per ogni} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Quindi, per il teorema di Cauchy-Lipschitz, esistono $T > 0$ ed una funzione derivabile

$$x : (-T, T) \to \mathbb{R}$$

tale che

$$\begin{cases} x'(t) = F(x(t)) = x(t) \quad \text{per ogni} \quad t \in (-T, T); \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Ora, iterando Lemma 1 e Lemma otteniamo che esiste una funzione

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

derivabile e positiva su $\mathbb{R}$ e tale che

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \quad \text{per ogni} \quad t \in (-T, T); \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Per dimostrare che x è l'unica, supponiamo che esiste una funzione derivabile $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) \quad \text{per ogni} \quad t \in \mathbb{R}; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Siccome, $x > 0$ su $\mathbb{R}$ abbiamo che la funzione

$$u(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$$

è ben definita (e derivabile) su $\mathbb{R}$. Inoltre,

$$u'(t) = \frac{y'(t)x(t) - x'(t)y(t)}{x(t)^2} = \frac{y(t)x(t) - x(t)y(t)}{x(t)^2} = 0$$

e quindi

$$y(t) = x(t) \quad \text{per ogni} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Questo conclude la dimostrazione dell'esistenza e l'unicità. Osserviamo che la proprietà (i) è soddisfatta per costruzione. Infine, per dimostrare (ii), fissiamo $s \in \mathbb{R}$ e consideriamo la funzione

$$y(t) = \frac{x(t+s)}{x(s)}.$$

Allora,

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) \quad \text{per ogni} \quad t \in \mathbb{R}; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Quindi, per l'unicità, abbiamo che per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{x(t+s)}{x(s)} = y(t) = x(t).$$

$\square$

Teorema 4. *Sia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'unica funzione derivabile su $\mathbb{R}$ tale che*

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \quad \textit{per ogni} \quad t \in \mathbb{R} \\ x(0) = 1. \end{cases} \quad .$$

Allora,

$$x(t) = e^t \quad \textit{per ogni} \quad t \in \mathbb{R},$$

dove

$$e := x(1) > 1.$$

Dimostrazione. Usando le propritá (i) e (ii) (del Teorema 3) della soluzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si ottiene che:

(1) $x(nt) = x(t)^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(2) $x(n) = x(1)^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(3) $x(1/n) = x(1)^{1/n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(4) $x(m/n) = x(1)^{m/n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$;

(5) $x(m/n) = x(1)^{m/n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Ora, basta ricordare che la potenza $\alpha \in \mathbb{R}$ di un numero reale positivo $b > 1$ sia definita come

$$b^\alpha = \sup \Big\{ b^q \ : \ q - \text{razionale}, \ q < \alpha \Big\}$$

e che la così ottenuta funzione

$$t \mapsto b^t$$

sia continua e monotona crescente su $\mathbb{R}$. Quindi, usando (5) e la densità dei numeri razionali in $\mathbb{R}$, otteniamo che

$$x(t) = x(1)^t \qquad \text{per ogni} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

$\square$