

# Principali definizioni, formule e teoremi da sapere

Gli enunciati completi si trovano nelle dispense sul sito del corso.

I risultati segnati con ★ sono particolarmente importanti.

Questo elenco contiene soltanto i risultati principali; tutto quello che abbiamo fatto a lezione o si trova sul sito del corso fa parte del programma.

---

- ★ Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz in  $\mathbb{R}^n$  - con dimostrazione.
- ★ Disuguaglianza triangolare in  $\mathbb{R}^n$  - con dimostrazione.
- Definizioni: aperti, chiusi, compatti, connessi per archi, parte interna, chiusura e bordo di un insieme (vedi le domande del quiz).
- ★ Teorema: chiuso (=complementare di un aperto)  $\Leftrightarrow$  chiuso per successioni - con dimostrazione.
- ★ Teorema: compatto per successioni.  $\Leftrightarrow$  chiuso e limitato - con dimostrazione.
- ★ Teorema di Weierstrass - una funzione continua su un compatto ammette un massimo e un minimo - con dimostrazione.
- Teorema del valore intermedio su insiemi connessi per archi - con dimostrazione.
- Funzioni derivabili e derivate parziali in un punto - definizione.
- Derivate direzionali - definizione:  $\partial_V F(X_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(X_0 + tV) - F(X_0)}{t}$ , dove  $|V| = 1$ .
- Gradiente e matrice Hessiana - definizione.
- Funzioni di classe  $C^1$  e  $C^2$  - definizione - derivabili e continue, con derivate parziali continue.
- ★ Teorema: Le funzioni con gradiente nullo su un aperto connesso sono costanti - con dimostrazione.
- ★ Derivate parziali seconde - Teorema di Schwarz - con dimostrazione in dimensione due.
- Esempio di una funzione derivabile (in ogni punto), ma non continua.
- Funzioni differenziabili - definizione.
- Le funzioni differenziabili sono derivabili (il viceversa non è vero - con esempio).
- Le funzioni differenziabili sono continue (il viceversa non è vero - con esempio).
- ★ Teorema del differenziale - se una funzione è derivabile e le sue derivate parziali sono continue, allora la funzione è differenziabile - con dimostrazione in dimensione due.
- ★ Formule per la derivazione di una funzione composta - con dimostrazione in dimensione due per una funzione  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ed una curva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ .
- Corollario: formule per le derivate direzionali di una funzione differenziabile.
- Esempio di una funzione continua e derivabile in zero, ma non differenziabile in zero.
- Esempio di una funzione continua che ammette tutte le derivate direzionali (in ogni punto), ma non differenziabile in zero.
- ★ Teorema di Taylor al secondo ordine - con dimostrazione in dimensione due.
- Massimi e minimi relativi all'interno di un insieme aperto - condizione al primo ordine.

- ★ Teorema: Massimi e minimi relativi - condizioni necessarie e sufficienti al secondo ordine in dimensione due - con dimostrazioni. Punti di sella.
- Matrici definite positive/negative e semidefinite positive/negative - definizione ( $v \cdot Mv \geq 0$  per ogni vettore  $v$ ). Metodo per determinare se una matrice simmetrica  $2 \times 2$  è (semi)definita positiva/negativa in dimensione due - determinante e traccia.
- ★ Teorema dei moltiplicatori di lagrange - con dimostrazione in dimensione due.
- Funzioni differenziabili a valori vettoriali - definizione.
- 1-forme, 2-forme e  $k$ -forme ( $k \in \mathbb{N}$ ) in  $\mathbb{R}^n$  - definizione e operazioni con le forme differenziali - somma di forme differenziale, prodotto di una forma differenziale con una funzione.
- Prodotto esterno di forme differenziali - definizione e proprietà.
- Derivata esterna di una forma differenziale - definizione e proprietà.
- Forme esatte e forme chiuse - definizione.
- Le forme esatte sono chiuse - con dimostrazione per le 1-forme in dimensione 2.
- ★ Esempio di una forma chiusa ma non esatta.
- Curve  $C^1$  a tratti, semplici, chiuse. Curva inversa. Concatenamento di curve. Curve equivalenti.
- Integrale di una funzione su una curva - definizione. L'integrale non dipende dalla parametrizzazione - con dimostrazione.
- Integrazione di 1-forme su curve - definizione. L'integrale di una 1-forma non dipende dalla parametrizzazione - con dimostrazione.
- ★ Formula per l'integrale di una 1-forma esatta su una curva - con dimostrazione.
- Derivazione sotto il segno di integrale - con dimostrazione.
- ★ In un rettangolo le forme chiuse sono esatte - con dimostrazione in dimensione due
- ★ In un aperto stellato le forme chiuse sono esatte - con dimostrazione in dimensione due e tre.
- ★ Integrale di Riemann su rettangoli in  $\mathbb{R}^n$  - costruzione in  $\mathbb{R}^2$ . Criteri di integrabilità.
- ★ Integrabilità delle funzioni continue su rettangoli - con dimostrazione in dimensione due.
- ★ Teorema di Cantor su compatti in  $\mathbb{R}^n$  - con dimostrazione.
- Definizione di integrale di una funzione su un dominio limitato in  $\mathbb{R}^n$ . Integrabilità di funzioni continue su domini normali- con dimostrazione in dimensione due. Teorema di Fubini su domini normali - senza dimostrazione.
- ★ Formule di Gauss-Green - con dimostrazione in dimensione due su domini normali semplici.
- ★ Teorema della divergenza - con dimostrazione in dimensione due su domini normali semplici.
- ★ Formula di Stokes in  $\mathbb{R}^2$  - con dimostrazione in dimensione due su domini normali semplici.
- Integrali impropri in  $\mathbb{R}^2$ .
- ★ Applicazioni della formula dell'integrazione in coordinate polari - area di una sfera, volume di una palla in  $\mathbb{R}^3$ , integrale della Gaussiana.
- Formula del cambiamento di variabile in integrali doppi. Formula di integrazione di una funzione su una superficie parametrica.