Esercizi 2021/2022

Derivata di una funzione composta

Esercizio 1. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y)=\cos(3x-3+2y)+\sin(3y-x+1)$$

e la curva

$$\gamma(t)=e^t\big(\cos(t)\,,\,\sin(t)\,\big).$$

Calcolare la derivata $(F\circ\gamma)'(t)$ *della funzione composta* $t\mapsto F(\gamma(t))$ *nel punto* $t=0$.

Massimi e minimi relativi

Esercizio 2. *Consideriamo la funzione* $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$F(x,y)=x^3-\frac{1}{3}y^3+xy-x^2$$

Sia $A_0=(x_0,y_0)$ *l'unico punto critico di* F *fra i punti*

$$(1,1),\ (1,-1)\ \text{e}\ (-1,1).$$

(1) Trovare (x_0,y_0).

(2) Calcolare la matrice hessiana $\nabla^2F(x_0,y_0)$ *nel punto* (x_0,y_0).

(3) Stabilire se nel punto (x_0,y_0) *la matrice hessiana di* ∇^2F *è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, oppure indefinita.*

(4) Usando il punto precedente, determinare il comportamento della funzione F *in un intorno del punto* (x_0,y_0).

Massimi e minimi assoluti

Esercizio 3. *Data la funzione*

$$F(x,y)=\frac{xy+x}{x^2+y^2+1}$$

- *trovare i punti critici di* F *in* $\mathbb{R}^2$;
- *studiando la matrice Hessiana, dire se si tratta di punti di massimo locale, di minimo locale o punti di sella;*
- *calcolare* $\limsup\limits_{X\to\infty}F(X)$ *e* $\liminf\limits_{X\to\infty}F(X)$;
- *trovare* $\sup\limits_{\mathbb{R}^2}F$ *e* $\inf\limits_{\mathbb{R}^2}F$ *e dire se sono raggiunti in* $\mathbb{R}^2$ *oppure sono realizzati all'inifinito.*

Massimi e minimi su insiemi compatti

Esercizio 4. *Trovare il massimo ed il minimo della funzione*

$$F(x,y) = x^2 - y^2$$

sull'insieme

$$D = \{(x,y) \ : \ x^2 \le y \le x\}.$$

Liminf e limsup all'inifinito

Esercizio 5. *Determinare*

$$\limsup_{\substack{|(x,y)| \to +\infty \\ (x,y) \in \Omega}} F(x,y) \qquad e \qquad \liminf_{\substack{|(x,y)| \to +\infty \\ (x,y) \in \Omega}} F(x,y),$$

dove

$$F(x,y) = \frac{x^2+y^2-xy}{x^2+y^2+1} \qquad e \qquad \Omega := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x+y \ge 0\Big\}.$$

Moltiplicatori di Lagrange

Esercizio 6. *Trovare il massimo ed il minimo della funzione*

$$F(x,y,z) = x - y + z$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\Big\}.$$

Limiti, liminf e limsup nell'origine

Esempio 7. *Studiare il comportamento (esistenza di limite, limsup e liminf), per $(x,y) \to (0,0)$, della funzione*

$$F(x,y) := \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}(1+y^2)}.$$

Convergenza uniforme

Esercizio 8. *Consideriamo la famiglia di funzioni*

$$F_r : [-1,1] \to \mathbb{R}\ , \qquad F_r(x) = \sqrt{1+r^2x^2}\ .$$

Trovare il limite puntuale G della famiglia F_r per $r \to 0$.
Dire se F_r converge uniformemente a G per $r \to 0$.

Taylor

Esercizio 9. *Sviluppare la funzione di due variabili*

$$F(x,y) = \frac{e^{\sin x}}{1+xy}$$

fino al secondo ordine in zero.

Differenziabilità, derivabilità, continuità

Esercizio 10. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{xy\sin(x)}{x^2+y^2} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0).$$

(1) *Dire se F è derivabile in zero e calcolare, se esiste il gradiente $\nabla F(0,0) = (0,0)$.*

(2) *Dire se F è derivabile su $\mathbb{R}^2$ e determinare se le sue derivate parziali $\partial_x F$ e $\partial_y F$ sono funzioni continue su $\mathbb{R}^2$.*

(3) *Dire se F è differenziabile in zero.*

(4) *Dire se F è continua su $\mathbb{R}^2$.*

(5) *Calcolare, al variare del vettore $V = (a,b) \neq (0,0)$, la derivata direzionale*

$$\partial_V F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(tV).$$

Forme differenziali. Calcolo di $d\alpha$

Esercizio 11. *Consideriamo la forma differenziale*

$$\alpha = (3y + xy^2)\,dx + (2x - x^2y)\,dy.$$

Calcolare $d\alpha$.

Forme chiuse

Esercizio 12. *Dati tre numeri interi positivi $m, n, k \in \mathbb{N}$, consideriamo la 1-forma*

$$\alpha = e^{nx}(y^4 - mx + 1)\,dx + e^{mx}y^k\,dy\,.$$

Per quali valori dei parametri m, n e k la forma α è chiusa?

Forme chiuse e integrazione di 1-forme

Esercizio 13. *Per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la forma differenziale*

$$\alpha = \frac{ay+x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dy$$

è chiusa? Per i valori trovati calcolare $\int_\gamma \alpha$, dove γ è la curva

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \big(\cos(2t)\,,\, \sin(2t)\big).$$

Integrazione di funzioni su domini normali

Esercizio 14 (Appello luglio 2021). *Consideriamo il dominio d'integrazione*

$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \sqrt{2x^2+1} \leq y \leq x+1\Big\}.$$

e la funzione

$$F(x, y) = xy.$$

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D F(x, y)\, dx\, dy.$$

Calcolo dell'area di un dominio

Esercizio 15. *Calcolare l'area del dominio*

$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \leq y \leq 2x - x^2\Big\}.$$

Teorema della divergenza

Esercizio 16. *Sia D l'insieme*

$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq x\Big\}.$$

Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x, y) = \Big(xy\, , \ y(y - x)x^6\Big).$$

Calcolare

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x, y)\, dx\, dy.$$

Formula di Stokes

Esercizio 17 (Giugno 2020). *Sia D il dominio*

$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 \leq x \leq 1, \ 2x^2 \leq y \leq x^2 + 1\Big\}$$

e sia γ una curva semplice chiusa C^1 a tratti che parametrizza il bordo di D in senso antiorario. Data la 1-forma

$$\alpha = (x^2 - 2xy)\, dx + (y^3 + x)\, dy \ ,$$

calcolare l'integrale $\displaystyle\int_\gamma \alpha.$

Esercizi di topologia

Esercizio 18. *In* $\mathbb{R}^2$*, consideriamo l'insieme*

$$D := B_2(0,0) \setminus \Big\{(x,0) \ : \ 0 < x < 2\Big\}.$$

(1) *Dire se l'insieme* D *è:*

- *aperto;*
- *chiuso;*
- *compatto;*
- *stellato;*
- *connesso per archi;*
- *convesso.*

(2) *Determinare la frontiera di* D*.*

Esercizio 19. *In* $\mathbb{R}^2$*, consideriamo l'insieme*

$$\Omega = B_1(0,0) \setminus \Big\{(x,y) \ : \ xy = 0\Big\}.$$

(1) *Trovare la parte interna, la chiusura e la frontiera di* Ω*.*

(2) *È vero che* $\partial\overline{\Omega} = \partial\Omega$*?*

Integrazione in coordinate polari

Esercizio 20. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{x^2}{1 + x^2 + y^2},$$

calcolare l'integrale

$$\iint_{B_1} F(x,y)\, dx\, dy.$$

Integrazione su superfici

Esercizio 21. *Calcolare l'area della superficie parametrica*

$$\Phi : B_1 \to \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(x,y) = (x, y, xy).$$