

Derivabilità, esistenza delle derivate direzionali, continuità e differenziabilità. Esempi classici

Esercizio 1. *Data una funzione*

$$G : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad G = G(x, y),$$

consideriamo la funzione

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

definita come

$$F(x, y) = \begin{cases} G(x, y) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) *Dire se esistono le derivate parziali $\partial_x F(0,0)$ e $\partial_y F(0,0)$.*
 (b) *Dire se esistono tutte le derivate direzionali $\partial_V F(0,0)$ al variare del vettore $V = (a, b) \neq (0, 0)$.*
 (c) *Dire se vale la formula $\partial_V F(0,0) = V \cdot \nabla F(0,0)$ per tutti i vettori $V = (a, b) \neq (0, 0)$.*
 (d) *Dire se la funzione F è continua in $(0,0)$.*
 (e) *Dire se la funzione F è differenziabile in $(0,0)$.*

la funzione $G(x,y)$	$\nabla F(0,0)$ (a)	$\partial_V F(0,0)$ (b)	$\partial_V F(0,0) = V \cdot \nabla F(0,0)$ (c)	cont. (d)	diff. (e)
$G(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	NO	NO	NO	SÌ	NO
$G(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$	SÌ	NO	NO	NO	NO
$G(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	SÌ	NO	NO	SÌ	NO
$G(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$	SÌ	SÌ	NO	SÌ	NO
$G(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$	SÌ	SÌ	NO	NO	NO
$G(x, y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$	SÌ	SÌ	SÌ	NO	NO
$G(x, y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^4}$	SÌ	SÌ	SÌ	SÌ	NO
$G(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}$	SÌ	SÌ	SÌ	SÌ	SÌ