

Massimi e minimi di funzioni definite su \mathbb{R}^d

MASSIMI E MINIMI SU INSIEMI ILLIMITATI

Teorema 1. Siano $D \subset \mathbb{R}^d$ un insieme chiuso ed $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su D . Allora, vale (almeno) una delle proprietà seguenti:

- (1) esiste un punto $X_0 \in D$ tale che $F(X_0) = \sup_{X \in D} F(X)$;
- (2) $\sup_{X \in D} F(X) = \limsup_{\substack{|X| \rightarrow +\infty \\ X \in D}} F(X)$.

Dimostrazione. Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione che realizza l'estremo superiore, ovvero

$$\sup_{X \in D} F(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(X_n).$$

Consideriamo due casi.

Caso 1. X_n è una successione limitata. Allora, per il teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una sottosuccessione $(X_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente ad un qualche $X_0 \in \mathbb{R}^d$. Inoltre, siccome D è chiuso, abbiamo:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_{n_k} = X_0 \in D.$$

Quindi, per la continuità di F ,

$$F(X_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(X_{n_k}) = \sup_{X \in D} F(X).$$

Caso 2. La successione X_n non è limitata. Allora, esiste una sottosuccessione $(X_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |X_{n_k}| = +\infty.$$

Definiamo $r_k := |X_{n_k}|$. Allora,

$$\sup_{X \in D} F(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(X_{n_k}) \leq \limsup_{\substack{|X| \rightarrow +\infty \\ X \in D}} \left\{ \sup_{X \in D \cap \partial B_{r_k}} F(X) \right\} \leq \limsup_{R \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{D \cap \partial B_R} F \right\}.$$

D'altra parte,

$$F(X) \leq \sup_D F \quad \text{per ogni } X \in D,$$

e quindi

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{D \cap \partial B_R} F(X) \right\} \leq \sup_D F,$$

il che implica

$$\limsup_{\substack{|X| \rightarrow +\infty \\ X \in D}} F(X) = \limsup_{R \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{D \cap \partial B_R} F \right\} = \sup_D F. \quad \square$$

Teorema 2. Siano $D \subset \mathbb{R}^d$ un insieme chiuso ed $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su D . Allora, vale (almeno) una delle proprietà seguenti:

- (1) esiste un punto $X_0 \in D$ tale che $F(X_0) = \inf_{X \in D} F(X)$;
- (2) $\inf_{X \in D} F(X) = \liminf_{\substack{|X| \rightarrow +\infty \\ X \in D}} F(X)$.

Corollario 3. Siano $D \subset \mathbb{R}^d$ un insieme chiuso ed $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su D . Allora, F è limitata su D se e solo se

$$\liminf_{\substack{|X| \rightarrow +\infty \\ X \in D}} F(X) > -\infty \quad e \quad \limsup_{\substack{|X| \rightarrow +\infty \\ X \in D}} F(X) < +\infty.$$

Corollario 4. Siano $D \subset \mathbb{R}^d$ un insieme chiuso ed $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su D . Allora, F è limitata su D se e solo se

$$\liminf_{\substack{|X| \rightarrow +\infty \\ X \in D}} |F(X)| < +\infty.$$

ESERCIZI ED ESEMPI

Esercizio 5. Per ciascuna delle funzioni $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

- trovare i punti critici di F in \mathbb{R}^2 ;
- studiando la matrice Hessiana, dire se si tratta di punti di massimo locale, di minimo locale o punti di sella;
- calcolare $\limsup_{X \rightarrow \infty} F(X)$ e $\liminf_{X \rightarrow \infty} F(X)$;
- trovare $\sup_{\mathbb{R}^2} F$ e $\inf_{\mathbb{R}^2} F$ e dire se sono raggiunti in \mathbb{R}^2 oppure sono realizzati all'infinito.

(1) $F(x, y) = \frac{xy + x}{x^2 + y^2 + 1};$

(2) $F(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1};$

(3) $F(x, y) = \frac{x^2 - y}{x^2 + y^2 + 1};$

(4) $F(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1};$

(5) $F(x, y) = \frac{y}{x^2 + 1};$

(6) $F(x, y) = \frac{xy}{x^2 + 1};$

(7) $F(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1};$

(8) $F(x, y) = \frac{y^2}{x^2 + y^2 + 1};$

(9) $F(x, y) = \frac{x}{x^2 y^2 + 1};$

(10) $F(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^4 + 1};$

(11) $F(x, y) = \frac{x + y}{1 + x^2 + 4y^2}.$

Risposte:

- (1) punti critici: $(0, -1)$, $(\sqrt{2}, 1)$, $(-\sqrt{2}, 1)$; all'infinito: $\limsup F = 1/2$, $\liminf F = -1/2$; F ammette un massimo ed un minimo in \mathbb{R}^2 ;
- (2) punti critici: $(1, 0)$, $(-1, 0)$; all'infinito: $\limsup F = \liminf F = 0$; F ammette un massimo ed un minimo in \mathbb{R}^2 ;
- (3) punti critici: $(0, 1)$, $(0, -1)$; all'infinito: $\limsup F = 1$, $\liminf F = 0$; F è limitata; non ammette un massimo e $\sup F = \limsup_{|X| \rightarrow \infty} F(X)$; F ammette un minimo in \mathbb{R}^2 ;
- (4) l'unico punto critico di F è $(0, 0)$ ed è un punto di sella; all'infinito $\limsup F = 1/2$, $\liminf F = -1/2$; F non ammette ne massimo ne minimo su \mathbb{R}^2 ; F è limitata su \mathbb{R}^2 ;
- (5) F non ha punti critici in \mathbb{R}^2 ; all'infinito $\limsup F = +\infty$, $\liminf F = -\infty$; F non ammette ne massimo ne minimo su \mathbb{R}^2 ; F non è limitata su \mathbb{R}^2 ;
- (6) l'unico punto critico di F è $(0, 0)$ ed è un punto di sella; all'infinito $\limsup F = +\infty$, $\liminf F = -\infty$; F non ammette ne massimo ne minimo su \mathbb{R}^2 ; F non è limitata su \mathbb{R}^2 ;
- (7) l'unico punto critico di F è $(0, 0)$ ed è un punto di sella; all'infinito $\limsup F = 1$, $\liminf F = -1$; F non ammette ne massimo ne minimo su \mathbb{R}^2 ; F è limitata su \mathbb{R}^2 ;
- (8) i punti critici di F sono tutti i punti della forma $(x, 0)$ con $x \in \mathbb{R}$; in questi punti, la matrice Hessiana è semi-definita positiva e $F(x, 0) = 0$; all'infinito $\limsup F = 1$, $\liminf F = 0$; F non ammette un massimo su \mathbb{R}^2 ; tutti i punti della forma $(x, 0)$ sono punti di minimo (assoluto); F è limitata su \mathbb{R}^2 ;
- (9) F non ha punti critici in \mathbb{R}^2 ; all'infinito $\limsup F = +\infty$, $\liminf F = -\infty$; F non ammette ne massimo ne minimo su \mathbb{R}^2 ; F non è limitata su \mathbb{R}^2 ;
- (10) punti critici: $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, 1)$, $(-\sqrt{2}, 1)$, $(\sqrt{2}, -1)$, $(-\sqrt{2}, -1)$; all'infinito: $\limsup F = \liminf F = 0$; F ammette un massimo ed un minimo in \mathbb{R}^2 ;
- (11) punti critici: $(\sqrt{20/25}, \sqrt{1/20})$, $(-\sqrt{20/25}, -\sqrt{1/20})$; all'infinito: $\limsup F = \liminf F = 0$; F ammette un massimo ed un minimo in \mathbb{R}^2 .