Sviluppo di Taylor al secondo ordine

Teorema 1 (Teorema di Taylor)**.** *Siano Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $F:\Omega\to\mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(\Omega)$. Allora*

$$F(X)=F(X_0)+\sum_{i=1}^d \partial_i F(X_0)\big(X^i-X_0^i\big)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \partial_{ij}F(X_0)\big(X^i-X_0^i\big)\big(X^j-X_0^j\big)+o\big(|X-X_0|^2\big).$$

Dimostrazione in dimensione due. Useremo la notazione $X=(x,y)$ e $X_0=(x_0,y_0)$. Inoltre, senza perdità di generalità, possiamo supporre che $(x_0,y_0)=(0,0)$. Ora, siccome le funzioni

$$\partial_x F:\Omega\to\mathbb{R}\qquad \text{e}\qquad \partial_y F:\Omega\to\mathbb{R}$$

sono di classe C^1, abbiamo

$$\partial_x F(x,y)=\partial_x F(0,0)+(x,y)\cdot\nabla(\partial_x F)(0,0)+\varepsilon_1(x,y),$$
$$\partial_y F(x,y)=\partial_y F(0,0)+(x,y)\cdot\nabla(\partial_y F)(0,0)+\varepsilon_2(x,y),$$

dove

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\qquad \text{e}\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon_2(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0. \tag{1}$$

Ora, fissiamo (x,y) in intorno di $(0,0)$ e calcoliamo

$$\begin{aligned}
F(x,y)-F(0,0)&=\int_0^1 (x,y)\cdot\nabla F(sx,sy)\,ds\\
&=\int_0^1 x\,\partial_x F(sx,sy)\,ds+\int_0^1 y\,\partial_y F(sx,sy)\,ds\\
&=\int_0^1 x\Big(\partial_x F(0,0)+sx\partial_{xx}F(0,0)+sy\partial_{yx}F(0,0)+\varepsilon_1(sx,sy)\Big)\,ds\\
&\qquad+\int_0^1 y\Big(\partial_y F(0,0)+sx\partial_{xy}F(0,0)+sy\partial_{yy}F(0,0)+\varepsilon_2(sx,sy)\Big)\,ds\\
&=(x,y)\cdot\nabla F(0,0)+\frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix}\partial_{xx}F(0,0) & \partial_{yx}F(0,0)\\ \partial_{xy}F(0,0) & \partial_{yy}F(0,0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\\
&\qquad+\int_0^1\Big(x\varepsilon_1(sx,sy)+y\varepsilon_2(sx,sy)\Big)\,ds.
\end{aligned}$$

Quindi basta verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{x^2+y^2}\int_0^1\Big(x\varepsilon_1(sx,sy)+y\varepsilon_2(sx,sy)\Big)\,ds=0.$$

Usando (1) abbiamo che per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che:

$$\sqrt{x^2+y^2}<\delta\qquad\Rightarrow\qquad\frac{\varepsilon_j(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}<\varepsilon.$$

Di conseguenza, per $j=1,2$ e per ogni $s>0$, abbiamo

$$\sqrt{x^2+y^2}<\delta\qquad\Rightarrow\qquad\frac{\varepsilon_j(sx,sy)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{s\,\varepsilon_j(sx,sy)}{\sqrt{(sx)^2+(sy)^2}}<s\varepsilon.$$

Quindi, per $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$, si ha che

$$\frac{1}{x^2+y^2}\int_0^1\Big(x\varepsilon_1(sx,sy)+y\varepsilon_2(sx,sy)\Big)\,ds<\varepsilon,$$

il che conclude la dimostrazione. □