Derivazione lungo cammini e derivate direzionali

Composizione di funzioni differenziabili con curve derivabili

Teorema 1. *Siano $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ una funzione differenziabile nel punto $t_0 \in \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $\gamma(t_0)$. Allora la funzione composta $F \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è differenziabile in t_0 e*

$$(F \circ \gamma)'(t_0) = \gamma'(t_0) \cdot \nabla F\big(\gamma(t_0)\big).$$

Dimostrazione in dimensione due. Poniamo

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big) \quad \text{e} \quad \gamma(t_0) = \big(x_0, y_0\big).$$

Siccome, per ipotesi, F è differenziabile in (x_0, y_0) abbiamo che la funzione

$$\varepsilon(H,K) := F(x_0 + H, y_0 + K) - \Big[F(x_0, y_0) + H\,\partial_x u(x_0, y_0) + K\,\partial_y F(x_0, y_0)\Big]$$

è un $o\left(\sqrt{H^2 + K^2}\right)$, ovvero

$$\lim_{(H,K)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(H,K)}{\sqrt{H^2+K^2}} = 0.$$

Ora, ponendo

$$H(t) := x(t_0 + t) - x(t_0) \qquad \text{e} \qquad K(t) := y(t_0 + t) - y(t_0),$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\Big[F\big(x(t_0+t), y(t_0+t)\big) - F\big(x(t_0), y(t_0)\big)\Big] \\
&\qquad = \frac{1}{t}\Big[F\Big(\big(x(t_0+t) - x_0\big) + x_0\,,\ \big(y(t_0+t) - y_0\big) + y_0\Big) - F\big(x_0, y_0\big)\Big] \\
&\qquad = \frac{1}{t}\big(x(t_0+t) - x(t_0)\big)\,\partial_x F(x_0, y_0) \\
&\qquad\quad + \frac{1}{h}\big(y(t_0+t) - y(t_0)\big)\,\partial_y F(x_0, y_0) \\
&\qquad\quad + \frac{1}{t}\varepsilon\Big(x(t_0+t) - x(t_0)\,,\ y(t_0+t) - y(t_0)\Big).
\end{aligned}$$

Siccome x e y sono funzioni di una variabile derivabili in t_0, abbiamo che

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(x(t_0+t) - x(t_0)\big)\,\partial_x F(x_0, y_0) = x'(t_0)\,\partial_x F(x_0, y_0)\,,$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(y(t_0+t) - y(t_0)\big)\,\partial_y F(x_0, y_0) = y'(t_0)\,\partial_y F(x_0, y_0)\,.$$

Ora, usando di nuovo la derivabilità di x e y in zero abbiamo che

$$H(t) = O(t) \qquad \text{e} \qquad K(t) = O(t).$$

e quindi anche

$$\sqrt{H(t)^2 + K(t)^2} = O(t).$$

Di conseguenza,

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\varepsilon\big(H(t), K(t)\big) = \lim_{t\to 0} \left\{ \frac{\varepsilon\big(H(t), K(t)\big)}{\sqrt{H(t)^2 + K(t)^2}} \frac{\sqrt{H(t)^2 + K(t)^2}}{t} \right\} = 0.$$

$\square$

Derivate direzionali

Definizione 2. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ ed $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione data. Siano $X_0 \in \Omega$ un punto di Ω e $\nu \in \mathbb{R}^d$ un vettore di $\mathbb{R}^d$. Diciamo che*

la funzione F è derivabile nella direzione ν nel punto X_0

se la funzione

$$t \mapsto F(X_0 + t\nu)$$

è derivabile in $t = 0$. La sua derivata in zero si indica con

$$\partial_\nu F(X_0) := \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(X_0 + t\nu).$$

e prende il nome di **derivata direzionale** *(di F in X_0 e nella direzione ν).*

Osserviamo che, per il teorema della derivata di una funzione composta, se la funzione $F : \Omega \to \mathbb{R}$ è differenziabile in X_0, allora F è derivabile (nel punto X_0) nella direzione ν e la derivata direzionale si può calcolare usando la formula

$$\partial_\nu F(X_0) = \nu \cdot \nabla F(X_0).$$

In particolare, questo implica che se per una qualche funzione $G : \Omega \to \mathbb{R}$ esistono sia la derivata direzionale $\partial_\nu G(X_0)$ che le derivate parziali $\partial_{x_1} G(X_0),\ \partial_{x_2} G(X_0), \dots,\ \partial_{x_d} G(X_0)$, ma si ha che

$$\partial_\nu G(X_0) \neq \nu \cdot \nabla G(X_0),$$

allora la funzione G non è differenziabile in X_0.

Esempio 3. *L'esistenza delle derivate direzionali non garantisce la differenziabiltà (e nemmeno la continuità) di una funzione. Infatti, la funzione*

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\[2ex] \quad 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

è derivabile in ogni direzione $\nu = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ (nell'origine) e la derivata direzionale $\partial_\nu F(0,0)$ è data da

$$\partial_\nu F(0,0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(ta,tb) = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}.$$

In particolare, si ha che

$$\partial_x F(0,0) = 0 \qquad e \qquad \partial_y F(0,0) = 0.$$

Tuttavia, F non è differenziabile in zero, visto che quando $a \neq 0$ e $b \neq 0$, si ha che

$$\partial_\nu F(0,0) = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2} \neq 0 \qquad mentre \qquad \nu \cdot \nabla F(0,0) = a\,\partial_x F(0,0) + b\,\partial_y F(0,0) = 0.$$

I seguenti due esercizi sono dedicati ad altri due esempi di funzioni che ammettono derivate direzionali in tutte le direzioni ma non sono differenziabili in zero. In particolare, in Esercizio 4, la funzione F non è nemmeno continua in zero!

Esercizio 4. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

(i) *Mostrare che per ogni vettore* $\nu = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ *la funzione (di una variabile)*

$$t \mapsto F(t\nu)$$

è derivabile in $t = 0$ *e si ha*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(t\nu) = \begin{cases} \frac{b^2}{a} & se \quad a \neq 0, \\ 0 \quad se \quad a = 0 \end{cases} .$$

(ii) *Mostrare che la funzione* F *non è continua in* $(0,0)$.

Esercizio 5. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

(i) *Mostrare che per ogni vettore* $\nu \in \mathbb{R}^2$ *la funzione (di una variabile)*

$$t \mapsto F(t\nu)$$

è derivabile in $t = 0$ *e si ha*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(t\nu) = 0.$$

(ii) *Mostrare che la funzione* F *è continua in* $(0,0)$.

(iii) *Mostrare che la funzione* F *non è differenzibile in* $(0,0)$.

Esercizi sulle derivate di funzione composte

Esercizio 6. *Date la funzione F e la curva γ calcolare la derivata* $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(\gamma(t))$ *della funzione composta $F\circ\gamma$ in* 0.

(1) $\gamma(t) = \Big(t+\cos t\sin(t^2)\,,\ t^2+e^t-1\Big)$ *e* $F(x,y)=\cos x\sin y+\sin(xy^2)$.

(2) $\gamma(t) = \Big(\cos(t+t^2)\,,\ \sin\big(t^2\big)\Big)$ *e* $F(x,y)=x^2e^y$.

(3) $\gamma(t) = \Big(\cos(t^2)\,,\ \sin\big(t+t^2\big)\Big)$ *e* $F(x,y)=ye^x$.

(4) $\gamma(t) = \Big(t+t^2\,,\ t+\sin^3 t\Big)$ *e* $F(x,y)=x\cos(3y)+y\cos(2x)$.

(5) $\gamma(t) = \Big(e^t-\cos t\,,\ \sin(t+t^2)\Big)$ *e* $F(x,y)=x+\sin(2y)+\sin(xy)+\sin(x^3y^3)+\sin(x^5y^5)$.

(6) $\gamma(t) = \Big(t\cos t\,,\ \cos t\Big)$ *e* $F(x,y)=\ln y+x\sin(xy)\ln y$.

Esercizio 7. *Date la curva*

$$\gamma(t)=\Big(t+(\ln t)^2,t^3\Big),$$

e la funzione

$$F(x,y)=\ln\big(xy+\sin(x-y)\big),$$

calcolare la derivata $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=1} F(\gamma(t))$ *della funzione composta $F\circ\gamma$ in $t=1$.*

Dagli appelli precedenti

Esercizio 8 (Gennaio 2021 - versione 1)**.** *Consideriamo la curva*

$$\gamma(t)=(\sin(t+t^2),2t-t^2)$$

e la funzione

$$F(x,y)=y\sin(x+xy)+x\cos(y+xy)$$

Calcolare la derivata $(F\circ\gamma)'(t)$ della funzione composta $t\mapsto F(\gamma(t))$ nel punto $t=0$.

Esercizio 9 (Gennaio 2021 - versione 2)**.** *Consideriamo la curva*

$$\gamma(t)=(\sin(t+t^2),2t-t^2)$$

e la funzione

$$F(x,y)=y\cos(x+xy)+\sin(y+xy)$$

Calcolare la derivata $(F\circ\gamma)'(t)$ della funzione composta $t\mapsto F(\gamma(t))$ nel punto $t=0$.

Esercizio 10 (Febbraio 2021 - versione 1)**.** *Consideriamo la curva $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$*

$$\gamma(t)=\Big(\sqrt{1+4\sin t}-1\,,\ \sin(4t-2t^2)\Big),$$

e la funzione $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$F(x,y)=x-y+xy+x^2y^2.$$

Calcolare la derivata della funzione composta $F\circ\gamma$ in 0:

$$(F\circ\gamma)'(0)=\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}F(\gamma(t)).$$

Esercizio 11 (Febbraio 2021 - versione 2). *Consideriamo la curva* $\gamma : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \Big(\sin(2t - t^2)\,,\ \frac{1}{1+2t} - \frac{1}{1-t} \Big),$$

e la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x, y) = (1 - x - xy)(1 - y)^2.$$

Calcolare la derivata della funzione composta $F \circ \gamma$ *in* 0*:*

$$(F \circ \gamma)'(0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)).$$

Esercizio 12 (Aprile 2021 - versione 1). *Consideriamo la curva* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \Big(\sqrt{t \sin(4t)}\,,\ e^{2t} - e^{-t} \Big),$$

e la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x, y) = x - y + xy + x^2 y^2.$$

Calcolare la derivata della funzione composta $F \circ \gamma$ *in* 0*:*

$$(F \circ \gamma)'(0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)).$$

Esercizio 13 (Aprile 2021 - versione 2). *Consideriamo la curva* $\gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \Big(\ln(1 + 2t)\,,\ \frac{1}{1-2t} - \frac{1}{1+t} \Big),$$

e la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x, y) = (1 - 2y)(1 + x)^3.$$

Calcolare la derivata della funzione composta $F \circ \gamma$ *in* 0*:*

$$(F \circ \gamma)'(0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)).$$

Esercizio 14 (Giugno 2021 - versione 1). *Consideriamo la funzione*

$$F(x, y) = \cos(2x + y) + \sin(y - xy)$$

e la curva

$$\gamma(t) = (t + t^2, \sin(3t)).$$

Calcolare la derivata $(F \circ \gamma)'(t)$ *della funzione composta* $t \mapsto F(\gamma(t))$ *nel punto* $t = 0$.

Esercizio 15 (Giugno 2021 - versione 2). *Consideriamo la funzione*

$$F(x, y) = e^{x+2y} + \ln(1 + 2y + xy)$$

e la curva

$$\gamma(t) = \big(\sin(3t)\,,\ t^2 - t \big).$$

Calcolare la derivata $(F \circ \gamma)'(t)$ *della funzione composta* $t \mapsto F(\gamma(t))$ *nel punto* $t = 0$.

Esercizio 16 (Luglio 2021). *Consideriamo la funzione*

$$F(x, y) = \sin(x + 2y) + \ln(1 + 3y - xy)$$

e la curva

$$\gamma(t) = \big(e^{3t+t^2} - e^{-t}\,,\ t - t^3 \big).$$

Calcolare la derivata $(F \circ \gamma)'(t)$ *della funzione composta* $t \mapsto F(\gamma(t))$ *nel punto* $t = 0$.

Esercizio 17 (Settembre 2021). *Consideriamo la funzione*

$$F(x, y) = \cos(3x - 3 + 2y) + \sin(3y - x + 1)$$

e la curva

$$\gamma(t) = e^t \big(\cos(t)\,,\ \sin(t) \big).$$

Calcolare la derivata $(F \circ \gamma)'(t)$ *della funzione composta* $t \mapsto F(\gamma(t))$ *nel punto* $t = 0$.