Gli spazi $C^k(\Omega)$

Definizione

Definizione 1. *Sia Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione data.*

(i) *Diciamo che la funzione F è di classe C^0 su Ω, e scriviamo $F \in C^0(\Omega)$, o semplicemente $F \in C(\Omega)$, se la funzione F è continua su Ω.*

(ii) *Diciamo che la funzione F è di classe C^1 su Ω, e scriviamo $F \in C^1(\Omega)$, se:*

- *F è derivabile in Ω;*
- *le derivate parziali $\partial_{x_i} F$, $i = 1, \ldots, d$, sono funzioni continue su Ω.*

(iii) *Diciamo che la funzione F è di classe C^2 su Ω, e scriviamo $F \in C^2(\Omega)$, se:*

- *la funzione F è derivabile in Ω;*
- *le sue derivate parziali $\partial_{x_i} F$, $i = 1, \ldots, d$, sono a loro volta funzioni derivabili su Ω;*
- *le derivate parziali seconde $\partial_{x_j}\Big(\partial_{x_i} F\Big)$ sono funzioni continue su Ω, per ogni $i = 1, \ldots, d$ e $j = 1, \ldots, d$.*

Osservazione 2. *Per definizione, se $F \in C^k(\Omega)$, allora le sue derivate parziali $\partial_i F$ sono in $C^{k-1}(\Omega)$.*

Due conseguenze del teorema del differenziale

Corollario 3 ($C^1(\Omega) \subset C^0(\Omega)$)**.** *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ ed $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Se $F : \Omega \to \mathbb{R}$ è di classe $C^1(\Omega)$, ovvero F è derivabile in ogni punto di Ω e le sue derivate parziali*

$$\partial_j F : \Omega \to \mathbb{R} \qquad j = 1, \ldots, d$$

sono funzioni continue su Ω, allora anche la funzione F è continua su Ω.

Dimostrazione. Applicando il teorema del differenziale, otteniamo che la funzione F è differenziabile in ogni punti $X \in \Omega$. Siccome le funzioni differenziabili in un punto sono anche continue nel tale punto, otteniamo che F è continua su Ω. $\square$

Corollario 4 ($C^2(\Omega) \subset C^1(\Omega)$)**.** *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ ed $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Se $F : \Omega \to \mathbb{R}$ è di classe $C^2(\Omega)$, ovvero F è derivabile in ogni punto di Ω, le sue derivate parziali*

$$\partial_j F : \Omega \to \mathbb{R} \qquad j = 1, \ldots, d$$

sono funzioni derivabili su Ω e le derivate parziali seconde

$$\partial_i(\partial_j F) : \Omega \to \mathbb{R} \qquad j = 1, \ldots, d; \quad i = 1, \ldots, d,$$

sono funzioni continue su Ω, allora la funzione $F \in C^1(\Omega)$.

Dimostrazione. Segue dal corollario precedente applicato prima alle derivate parziali (prime) di F e poi a F stessa. $\square$