Funzioni derivabili

Funzioni derivabili e derivate parziali

Definizione 1. *Sia Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione data.*

(i) *Diciamo che la funzione F è* **derivabile** *nel punto $X = (x_1, \dots, x_d) \in \Omega$, se per ogni $i = 1, \dots, d$ esistono le* **derivate parziali**

$$\partial_{x_i} F(X) := \lim_{h\to 0} \frac{F(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_d) - F(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_d)}{h} .$$

Per le derivate parziali di F sono comunemente usate le seguenti notazioni:

$$\partial_{x_i} F = \partial_i F = \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Il vettore con coordinate $\partial_i F(X)$, $i = 1, \dots, d$, è detto **gradiente** *di F nel punto X*

$$\nabla F(X) := \big(\partial_{x_1} F(X), \partial_{x_2} F(X), \dots, \partial_{x_i} F(X), \dots, \partial_{x_d} F(X)\big) \in \mathbb{R}^d.$$

(ii) *Diciamo che funzione F è* **derivabile in Ω**, *se lo è in ogni punto $X \in \Omega$.*

Operazioni algebriche con le derivate parziali

Proposizione 2. *La somma e il prodotto di funzioni derivabili sono funzioni derivabili e per ogni $i = 1, \dots, n$ valgono le identita seguenti:*

$$\partial_i (F + G) = \partial_i F + \partial_i G \qquad e \qquad \partial_i (FG) = F\,\partial_i G + G\,\partial_i F\ .$$

Dimostrazione. Segue direttamente dalle formule per le funzioni derivabili di una variabile. □

Un esempio importante

Esempio 3. *In dimensione $d \geq 2$, la sola derivabilità di una funzione fornisce ben poche informazioni sul suo comportamento locale. Infatti,*

> *esistono funzioni definite su $\mathbb{R}^2$ e derivabili in ogni punto che non sono nemmeno continue!*

Per esempio, la funzione

$$F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & se \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & se \quad (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

è derivabile in ogni punto, zero compreso, ma non è continua in $(0, 0)$. Infatti, siccome

$$\begin{cases} F(x, 0) = 0 & per\ ogni \quad x \in \mathbb{R}, \\ F(0, y) = 0 & per\ ogni \quad y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

otteniamo che

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(h, 0) - F(0, 0)}{h} = 0 \qquad e \qquad \lim_{k\to 0} \frac{F(0, k) - F(0, 0)}{k} = 0,$$

e quindi le derivate parziali $\partial_x F(0,0)$ e $\partial_y F(0,0)$ esistono e sono uguali a zero. D'altra parte, se consideriamo la successione

$$X_n = (1/n\,,\,1/n) \quad per \quad n \geq 1,$$

abbiamo che

$$X_n \to (0,0),$$

ma

$$\lim_{n\to\infty} F(X_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n \cdot 1/n}{(1/n)^2 + (1/n)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

che è diverso da $F(0,0) = 0$. La funzione F quindi non è continua in $(0,0)$.

Funzioni derivabili con gradiente nullo

Teorema 4. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto e connesso per archi.*
Se $F : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile su Ω e tale che

$$\partial_{x_i} F(X) = 0 \quad per\ ogni \quad X \in \Omega \quad ed\ ogni \quad i = 1, \ldots, d,$$

allora F è costante su Ω.

Dimostrazione. Per semplicità supponiamo che $d = 2$. Sia $X_0 \in \Omega$ un punto fissato. Dimostreremo che

$$F(X) = F(X_0) \quad \text{per ogni} \quad X \in \Omega.$$

Definiamo l'insieme

$$A = \Big\{X \in \Omega \ :\ F(X) = F(X_0)\Big\}.$$

Osserviamo che:

- Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto, allora per ogni punto $X = (x,y) \in \Omega$ esiste un quadrato Q centrato in X e contenuto in Ω:

$$Q := (-\ell + x, \ell + x) \times (-\ell + y, y + \ell) \subset \Omega;$$

- Se $F : Q \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile e con gradiente nullo su un quadrato Q, allora la funzione F è costante su Q.

Di conseguenza, sia A che $\Omega \setminus A$ sono insiemi aperti il che implica che $\Omega \setminus A = \emptyset$. □