Prova scritta – 5/6/2024

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Consideriamo gli insiemi*

(A) $\Omega_A = B_2(0,0) \setminus B_1(1,0)$; (D) $\Omega_D = \overline{B}_2(0,0) \setminus \overline{B}_1(1,0)$;

(B) $\Omega_B = \overline{B}_2(0,0) \setminus B_1(1,0)$; (E) $\Omega_E = B_2(0,0) \setminus \overline{B}_1(1,0)$;

(C) $\Omega_C = \partial B_2(0,0) \cup \partial B_1(1,0)$; (F) $\Omega_F = \partial B_2(0,0) \setminus \partial B_1(1,0)$.

Gli insiemi seguenti sono **compatti :** B, C

Gli insiemi seguenti sono **aperti :** E

Gli insiemi seguenti non sono **né aperti, né compatti :** A, D, F

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = B_1(0,0) \setminus \Big\{(t,0) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t > 0\Big\}$$

$\partial D =$ $\partial B_1(0,0) \cup \{(t,0) : 0 \le t \le 1\}$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$$\frac{e^{x-y}\sin(x-y)}{\sqrt{1-3y+xy}} = x - y + x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}xy + o(x^2+y^2)$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \left(\cos(2t) - \dfrac{e^t}{\cos t}\, , \, \dfrac{\sin(2t)}{\cos(3t)}\right)$ *e* $F(x,y) = e^{y-x}\sqrt{\cos(3x-y)}$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) = \gamma'(0) \cdot DF(\gamma(0)) = (-1,2) \cdot (-1,1) = 3$$

Esercizio 5. *Calcolare, al variare del parametro* $A \in \mathbb{R}$*, la matrice hessiana* H *della funzione* $F(x,y) = \dfrac{(1+Axy)\cos(2x+xy)}{\sqrt{1+3y^2}}$ *nel punto* $(0,0)$.

$$H = \begin{pmatrix} -4 & A \\ A & -3 \end{pmatrix}$$

Per quali valori di A *la matrice* H *è* **definita negativa***?*

$-\sqrt{12} < A < \sqrt{12}$

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (x^2+xy)\,dx + (x^2-y^2)\,dy$ *e sia* γ *la curva semplice chiusa e* C^1 *a tratti che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = \{(x,y) \,:\, 0 < y < x - x^2\}$ *in senso antiorario.*

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha = \int_\Omega d\alpha = \int_0^1 dx \int_0^{x-x^2} x\,dy = \int_0^1 (x^2-x^3)\,dx = \frac{1}{12}$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \left(\dfrac{x^3-xy}{x^2+y^2+1}\,,\,\dfrac{y^3}{3+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

Dato l'insieme $\Omega = B_2(0,0)$ *, calcolare* $\displaystyle\iint_\Omega \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy = \frac{24\pi}{5}$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = (x^2+xy+x)e^{x-y}.$$

Trovare i punti critici di F *in* $\mathbb{R}^2$*. Studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.*

Esercizio 9. *Trovare l'estremo superiore della funzione*

$$F(x,y,z) = y+z\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2+(x+y+z)^2 \le 2\Big\}.$$

Esercizio 10. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{\sin(xy)}{3x^2+y^2} \quad ,$$

trovare $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{(x+xy)^{n+2}(y-xy)^{n+5}}{(x^2+xy^2+y^2)^{2n}} \quad se\ (x,y) \neq (0,0)\,.$$

Per quali valori del parametro intero $n \ge 1$ *la funzione* F *è differenziabile in* $(0,0)$ *?*

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = (x^2 + xy + x)e^{x-y}.$$

Calcoliamo le derivate parziali di F :

$$\partial_x F(x,y) = (2x+y+1)e^{x-y} + (x^2+xy+x)e^{x-y}$$
$$= (x^2+xy+3x+y+1)e^{x-y}$$

$$\partial_y F(x,y) = x e^{x-y} - (x^2+xy+x)e^{x-y}$$
$$= -(x^2+xy)e^{x-y}$$

I punti critici di F sono le soluzioni (x,y) del sistema

$$\begin{cases} \partial_x F(x,y) = 0 \\ \partial_y F(x,y) = 0 \end{cases}$$

Questo sistema è equivalente a:

$$\begin{cases} x^2 + xy + 3x + y + 1 = 0 \\ x^2 + xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x+y+1 = 0 \\ x(x+y) = 0 \end{cases}$$

Caso 1. $x = 0$; dalla prima equazione, $y = -1$.

Caso 2. $x \neq 0$;
quindi $y = -x$ e $3x+y+1 = 2x+1 = 0$
$\Rightarrow$ $x = -\frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$.

I punti critici sono $(0,-1)$ e $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Calcoliamo ora la matrice hessiana

$$D^2F(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}F(x,y) & \partial_{xy}F(x,y) \\ \partial_{yx}F(x,y) & \partial_{yy}F(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\partial_{xx}F = \partial_x\left[(x^2+xy+3x+y+1)e^{x-y}\right]$$
$$= (2x+y+3)e^{x-y} + (x^2+xy+3x+y+1)e^{x-y}$$

$$\partial_{xy}F = \partial_y\left[(x^2+xy+3x+y+1)e^{x-y}\right]$$
$$= (x+1)e^{x-y} - (x^2+xy+3x+y+1)e^{x-y}$$

$$\partial_{yx}F = \partial_x\left[-(x^2+xy)e^{x-y}\right]$$
$$= -(2x+y)e^{x-y} - (x^2+xy)e^{x-y}$$

$$\partial_{yy}F = \partial_y\left[-(x^2+xy)e^{x-y}\right]$$
$$= -xe^{x-y} + (x^2+xy)e^{x-y}$$

In un punto critico (x,y) abbiamo che

$$x^2+xy = x^2+xy+3x+y+1 = 0$$

Quindi, in un punto critico (x,y), la matrice hessiana di F è data da:

$$D^2F(x,y) = \begin{pmatrix} (2x+y+3)e^{x-y} & (x+1)e^{x-y} \\ (x+1)e^{x-y} & -x\,e^{x-y} \end{pmatrix}$$

Nel punto $(0,-1)$ abbiamo

$$D^2F(0,-1) = \begin{pmatrix} 2e & e \\ e & 0 \end{pmatrix} \quad ;$$

Siccome $\det\left(D^2F(0,-1)\right) = -e^2 < 0$,

la matrice $D^2F(0,-1)$ è indefinita

e quindi $(0,-1)$ è un punto di sella.

Nel punto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, abbiamo

$$D^2F\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}e^{-1} & \frac{1}{2}e^{-1} \\ \frac{1}{2}e^{-1} & \frac{1}{2}e^{-1} \end{pmatrix}$$

Abbiamo che:

$$\det\left(D^2F\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\right) = \frac{5}{4}e^{-2} - \frac{1}{4}e^{-2} > 0$$

$$\operatorname{tr}\left(D^2F\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\right) = \frac{5}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-1} > 0$$

Quindi $D^2F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ è definita positiva

e di conseguenza il punto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ è

un punto di minimo relativo per F.

Esercizio 9. *Trovare l'estremo superiore della funzione*

$$F(x, y, z) = y + z\,,$$

sull'insieme

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 + (x + y + z)^2 \leq 2\right\}.$$

Sol:

1) mostrare che D è chiuso e limitato.

2) usare il teorema di Weierstrass per dim che $\sup_D F$ è un massimo

3) mostrare che il massimo non è raggiunto nella parte interna di D

4) usare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange per trovare i punti critici di F su ∂D.

$$(*)\begin{cases} 0 = \lambda(2x+y+z) \\ 1 = \lambda(x+2y+z) \\ 1 = \lambda(x+y+z) \\ 2 = x^2+y^2+(x+y+z)^2 \end{cases}$$

5) Risolvere il sistema $(*)$.

6) Fra tutte le soluzioni $(*)$ trovare il massimo di F.

Risposta: $\sup_D F = 2$.

Esercizio 10. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{\sin(xy)}{3x^2+y^2} \quad ,$$

trovare $\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Sol: (1) Mostrare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy) - xy}{3x^2+y^2} = 0$$

e dedurre che

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{3x^2+y^2} = \limsup_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{3x^2+y^2}$$

② Passare in coordinate polari per calcolare $\limsup \frac{xy}{3x^2+y^2}$:

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{3x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \left\{ \sup_{\theta} \frac{\cos\theta \sin\theta}{3\cos^2\theta + \sin^2\theta} \right\}$$

$$= \sup_{\theta} \left\{ \frac{\cos\theta\sin\theta}{3\cos^2\theta + \sin^2\theta} \right\}$$

$$= \sup_{\theta} \frac{\cos\theta\sin\theta}{1+2\cos^2\theta} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{(x+xy)^{n+2}(y-xy)^{n+5}}{(x^2+xy^2+y^2)^{2n}} \quad se\ (x,y) \neq (0,0)\,.$$

Per quali valori del parametro intero $n \geq 1$ la funzione F è differenziabile in $(0,0)$?

Sol:

① Osservare che

$$F(x,y) = \frac{x^{n+2}y^{n+5}}{(x^2+y^2)^{2n}} \frac{(x^2+y^2)^{2n}}{(x^2+y^2+xy^2)^{2n}} (1+y)^{n+2}(1-x)^{n+5}$$

② $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+y)^{n+2} = 1$

③ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1-x)^{n+5} = 1$

(4) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+xy^2}\right)^{2n}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{1}{1+\frac{xy^2}{x^2+y^2}}\right)^{2n} = 0$$

$$\boxed{\text{infatti} \quad \lim \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0}$$

(5) Osservare che F è derivabile e che

$$\partial_x F(0,0) = \partial_y F(0,0) = 0.$$

Dedurre che F è differenziabile in zero se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$\iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{n+2}\, y^{n+5}}{(x^2+y^2)^{2n+1/2}} = 0$$

(6) Calcolare il limite in coordinate polari e dedurre che F è differenziabile $\iff n = 1, 2$
