Prova scritta – 26/1/2024

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Consideriamo gli insiemi*

$(A)\ \Omega_A = \Big(B_2(0,0) \setminus B_1(0,0)\Big) \cap B_2(1,0)$; $(D)\ \Omega_D = \Big(\overline{B}_2(0,0) \setminus B_1(0,0)\Big) \cap \overline{B}_2(1,0)$;

$(B)\ \Omega_B = \Big(B_2(0,0) \setminus B_1(0,0)\Big) \cup B_2(1,0)$; $(E)\ \Omega_E = \Big(\overline{B}_2(0,0) \setminus B_1(0,0)\Big) \cup \overline{B}_2(1,0)$;

$(C)\ \Omega_C = \Big(B_2(0,0) \setminus B_1(0,0)\Big) \setminus B_2(1,0)$; $(F)\ \Omega_F = \Big(\overline{B}_2(0,0) \setminus B_1(0,0)\Big) \setminus \overline{B}_2(1,0)$.

Gli insiemi seguenti sono **compatti:** D, E

Gli insiemi seguenti sono **aperti:** B

Gli insiemi seguenti non sono **né aperti, né compatti:** A, C, F

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (1+2x)^2 < x+y < 1-x\Big\}$$

$\partial D = \Big\{(x,y) : -\frac{5}{4} \le x \le 0,\ y = (1+2x)^2 - x\Big\} \cup \Big\{(x,y) : -\frac{5}{4} \le x \le 0,\ y = 1-2x\Big\}$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$$\frac{e^{x+y}(1-\sin(x+y))}{\sqrt{\cos x}} = 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - xy + o(x^2+y^2)$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big(1 - \dfrac{\cos(2t)}{1+2\sin t}\,,\ 1 - \dfrac{e^{2t}}{1+\sin(3t)}\Big)$ *e* $F(x,y) = (1+x)e^{3x-y}$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) = 7$$

Esercizio 5. *Calcolare, al variare del parametro $A \in \mathbb{R}$, la matrice hessiana H della funzione* $F(x,y) = \dfrac{(1 - Ax + x^2)e^{x-y}}{\cos(x-y)}$ *nel punto* $(0,0)$.

$$H = \begin{pmatrix} 4-2A & A-2 \\ A-2 & 2 \end{pmatrix}$$

Per quali valori di A la matrice H è **definita positiva**?

$A \in (-2, 2)$

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (y^3 + 2xy)\,dx + (x^2 - x^3)\,dy$ *e sia γ la curva semplice chiusa e C^1 che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = B_2(0,0) \cap \{(x,y) \,:\, xy > 0\}$ *in senso antiorario.*

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha = -12\pi$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \Big(3xy^2 + 3x^3 \,,\, yx^2 + y^3\Big)$.

Dato l'insieme $\Omega = B_1(0,0) \cap \{(x,y) \,:\, x \geq 0\}$, *calcolare* $\displaystyle\iint_\Omega \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy = 2\pi$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = y^3 - x^2y^2 - xy^4.$$

Trovare i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$. Studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. *Trovare l'estremo superiore della funzione*

$$F(x,y,z) = x - y\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x+y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 \leq 2\Big\}.$$

Esercizio 10. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{xy\sqrt{x^2+y^2}}{3x^2 + y^2(x^2+y^2) + x^4}\,,$$

calcolare $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{(\sin x)^{n+4} y^{n+3}}{(x^2+y^2)^{2n}} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0)\,.$$

Per quali valori del parametro intero $n \geq 1$ la funzione F è differenziabile in $(0,0)$?
