Prova scritta – 26/1/2024

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Consideriamo gli insiemi*

$(A)\ \Omega_A = \overline{B}_1(0,0) \setminus \Big([0,1] \times [0,1]\Big)$; $(D)\ \Omega_D = B_1(0,0) \setminus \Big([0,1] \times [0,1]\Big)$;

$(B)\ \Omega_B = \overline{B}_1(0,0) \setminus \Big([0,1) \times [0,1)\Big)$; $(E)\ \Omega_E = B_1(0,0) \setminus \Big([0,1) \times [0,1)\Big)$;

$(C)\ \Omega_C = \overline{B}_1(0,0) \setminus \Big((0,1] \times (0,1]\Big)$; $(F)\ \Omega_F = B_1(0,0) \setminus \Big((0,1] \times (0,1]\Big)$.

Gli insiemi seguenti sono **compatti :** C

Gli insiemi seguenti sono **aperti :** D, E

Gli insiemi seguenti non sono **né aperti, né compatti :** A, B, F

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ (1-x)^2 \le y^2 \le 1 - x^2 \quad e \quad y \ge 0\Big\}$$

$\partial D = \Big\{(x, 1-x) : x \in [0,1]\Big\} \cup \Big\{(x, \sqrt{1-x^2}) : x \in [0,1]\Big\}$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$$\frac{\sin(e^{x+y} - e^{x-y})}{1 - xy} = 2y + 2xy + o(x^2 + y^2)$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big(\ln(1-t)\cos(3t+t^2)\,,\ 1 - e^{2t+t^2}\Big)$ *e* $F(x,y) = e^{3x} + e^y - e^{xy}$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) = -5$$

Esercizio 5. *Calcolare la matrice hessiana H della funzione* $F(x,y) = \dfrac{\sin(x+y) + e^{-xy}}{1-x-y}$ *in* $(0,0)$. *Dire se H è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.*

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \textit{La matrice } H \textit{ è:} \ \text{definita positiva}$$

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (y^2+3)\,dx + (xy - x^2)\,dy$ *e sia* γ *la curva semplice chiusa e* C^1 *che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = \{(x,y)\ :\ 0 \le y \le x \le 1\}$ *in senso antiorario.*

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha = -\frac{5}{6}$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \Big((3y-2x)e^{x^2+y^2}\,,\ yx^2 + y^3\Big)$.

Dato l'insieme $\Omega = B_1(0,0) \cap \{(x,y)\ :\ y \ge 0\}$, *calcolare* $\displaystyle\iint_\Omega \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy = (1-2e)\frac{\pi}{2}$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = y^3x - x^2y^2 + xy^2.$$

Trovare i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$. Studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. *Trovare l'estremo superiore della funzione*

$$F(x,y,z) = y + z\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ (x+y+z)^2 + y^2 + 2z^2 \le 1\Big\}.$$

Esercizio 10. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{xy}{3x^2 + y^2\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

calcolare $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{x^{n+4}y^{n+6}}{(x^2+y^2-x^2y)^{2n}} \quad \textit{se } (x,y) \neq (0,0)\,.$$

Per quali valori del parametro intero $n \ge 1$ la funzione F è differenziabile in $(0,0)$?
