
Prova scritta – 9/1/2024

Non è consentito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. Consideriamo gli insiemi

$$(A) \Omega_A = ([1, 1] \times [-1, 1]) \setminus B_1(0, 0); \quad (D) \Omega_D = ([1, 1] \times [-1, 1]) \setminus \bar{B}_1(0, 0);$$

$$(B) \Omega_B = ((1, 1) \times (-1, 1)) \setminus B_1(0, 0); \quad (E) \Omega_E = ((1, 1) \times (-1, 1)) \setminus \bar{B}_1(0, 0);$$

$$(C) \Omega_C = ((1, 1) \times (-1, 1)) \cap \bar{B}_1(0, 0); \quad (F) \Omega_F = ([1, 1] \times [-1, 1]) \cap B_1(0, 0).$$

Gli insiemi seguenti sono compatti:

Gli insiemi seguenti sono aperti:

Gli insiemi seguenti non sono né aperti, né compatti:

Esercizio 2. Trovare la frontiera dell'insieme

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x \leq y \leq x \leq 1 \right\}$$

$\partial D =$

Esercizio 3. Sviluppare fino al secondo ordine in $(0, 0)$ la funzione

$$\frac{\cos(\sin x) \sqrt{1+x}}{1 + \sin(xy)} =$$

Esercizio 4. Siano $\gamma(t) = (e^{2t} - \cos(3t), e^{\sin(3t)} - \sqrt{\cos t})$ e $F(x, y) = \frac{\cos(3x + 2y) + \cos(2x - 3y)}{1 + x + y}$.

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\gamma(t)) =$$

Esercizio 5. Calcolare la matrice hessiana H della funzione $F(x, y) = \frac{\cos y + \ln(1 + xy)}{1 + x^2}$ in $(0, 0)$. Dire se H è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.

$H =$

La matrice H è:

Esercizio 6. Sia $\alpha = (xy^2 + 2yx^2) dx + (x^2y + xy^2 + x^3) dy$ e sia γ la curva semplice chiusa e C^1 che parametrizza il bordo del dominio $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 3\}$ in senso antiorario.

Calcolare $\int_{\gamma} \alpha =$

Esercizio 7. Consideriamo il campo $F(x, y) = \left((3x - 2y) \cos(x^2 + y^2), x(y^2 + x^2) + yx^2 + y^3 \right)$.

Sulla palla B_R di centro $(0, 0)$ e raggio $R = \sqrt{\pi}$, calcolare $\iint_{B_R} \operatorname{div} F(x, y) dx dy =$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = x^2y - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}y^2.$$

Trovare i punti critici di F in \mathbb{R}^2 e dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. Trovare il massimo della funzione

$$F(x, y, z) = y - z,$$

sull'insieme

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - y)^2 + (x - z)^2 + z^2 \leq 1 \right\}.$$

Esercizio 10. Data la funzione

$$F(x, y) = \frac{x \sin(xy)}{(x^2 + y^2)x^2 + y^2},$$

calcolare $\limsup_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} F(x, y)$.

Esercizio 11. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$F(0, 0) = 0 \quad e \quad F(x, y) = \frac{x^4 y^{2n+1}}{(x^4 + y^4 + 2x^2 y^2 + 3x^3 y^3)^n} \quad \text{se } (x, y) \neq (0, 0),$$

dove $n \geq 1$ è un numero intero.

- (1) Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione è derivabile in $(0, 0)$.
- (2) Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione F è continua in $(0, 0)$.
- (3) Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione F è differenziabile in $(0, 0)$.