Prova scritta – 9/1/2024

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Consideriamo gli insiemi*

(A) $\Omega_A = B_1(0,0) \cup \Big(\{1\} \times (-1,1)\Big)$; (D) $\Omega_D = \overline{B}_1(0,0) \cup \Big(\{1\} \times [-1,1]\Big)$;

(B) $\Omega_B = B_1(0,0) \setminus \Big(\{1\} \times (-1,1)\Big)$; (E) $\Omega_E = \overline{B}_1(0,0) \setminus \Big(\{1\} \times [-1,1]\Big)$;

(C) $\Omega_C = \overline{B}_1(0,0) \cup \Big(\{1\} \times (-1,1)\Big)$; (F) $\Omega_F = \overline{B}_1(0,0) \cap \Big(\{1\} \times [-1,1]\Big)$.

Gli insiemi seguenti sono **compatti :**

Gli insiemi seguenti sono **aperti :**

Gli insiemi seguenti non sono **né aperti, né compatti :**

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 \le y - 1 \le 2x \le 2\Big\}$$

$\partial D =$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$$\frac{e^{\sin x}\cos(x+y)}{1-y} =$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big(\ln(1+2t)\,,\ \ln(1-3\sin t)\Big)$ *e* $F(x,y) = \dfrac{\cos(x-2y)+\cos(2x+y)}{\sqrt{1+x-y}}$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) =$$

Esercizio 5. *Calcolare la matrice hessiana H della funzione* $F(x,y) = \dfrac{e^{2xy}}{1+\sin(x+2y)}$ *in* $(0,0)$*. Dire se H è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.*

$H =$ *La matrice H è:*

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (y^3+2xy)\,dx + (6xy^2+x^3+x^2)\,dy$ *e sia γ la curva semplice chiusa e C^1 che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = \big\{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \le 2\big\}$ *in senso antiorario. Calcolare* $\displaystyle\int_\gamma \alpha =$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \Big((3x+7y)\ln\big(1+2(x^2+y^2)\big)\,,\,(3x+2y)\ln\big(2+x^2+y^2\big)\Big)$. *Sulla palla B_R di centro $(0,0)$ e raggio $R=1$, calcolare* $\displaystyle\iint_{B_R} \operatorname{div}F(x,y)\,dx\,dy =$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^3 - y^2 + x^2y.$$

Trovare i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. *Trovare il massimo della funzione*

$$F(x,y,z) = x + 2y\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+(z-x+y)^2 \le 1\Big\}.$$

Esercizio 10. *Date le funzioni*

$$F(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+(x^2+y^2)y^2} \qquad e \qquad G(x,y) = \frac{xy^2-x^2y^2}{x^2+(x^2+y^2)y^2},$$

calcolare $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$; $\displaystyle\liminf_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$; $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} G(x,y)$; $\displaystyle\liminf_{(x,y)\to(0,0)} G(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{x^n y^{n+7}}{(x^2+y^2+y^4)^{2n}} \quad se\ (x,y) \neq (0,0),$$

dove $n \ge 1$ è un numero intero.

(1) *Per quali valori del parametro $n \ge 1$ la funzione è derivabile in $(0,0)$.*

(2) *Per quali valori del parametro $n \ge 1$ la funzione F è continua in $(0,0)$.*

(3) *Per quali valori del parametro $n \ge 1$ la funzione F è differenziabile in $(0,0)$.*
