Prova scritta – 20/4/2024

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Consideriamo gli insiemi*

$(A)\ \Omega_A = \Big(B_2(0,0) \setminus \overline{B}_1(0,0)\Big) \cap B_2(1,0)\ ;$ $(D)\ \Omega_D = \Big(\overline{B}_2(0,0) \setminus B_1(0,0)\Big) \cap B_2(1,0)\ ;$

$(B)\ \Omega_B = \Big(B_2(0,0) \setminus \overline{B}_1(0,0)\Big) \cup B_2(1,0)\ ;$ $(E)\ \Omega_E = \Big(\overline{B}_2(0,0) \setminus B_1(0,0)\Big) \cup B_2(1,0)\ ;$

$(C)\ \Omega_C = \Big(B_2(0,0) \setminus \overline{B}_1(0,0)\Big) \setminus B_2(1,0)\ ;$ $(F)\ \Omega_F = \Big(\overline{B}_2(0,0) \setminus B_1(0,0)\Big) \setminus B_2(1,0)\ .$

Gli insiemi seguenti sono **compatti:** F

Gli insiemi seguenti sono **aperti:** A, B

Gli insiemi seguenti non sono **né aperti, né compatti:** D, C, E

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ (1-x)^2 < y < 1-x\Big\}$$

$\partial D = \Big\{(x,y) : x \in [0,1],\ y = (1-x)^2\Big\} \cup \Big\{(x,y) : x \in [0,1],\ y = 1-x\Big\}.$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$$\frac{e^x(1-\sin(2y))}{\sqrt{\cos(x+y)}} = 1 + x - 2y + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{2}xy + o(x^2+y^2)$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \left(\dfrac{e^{2t}}{1-\sin t} - 1,\ \ln(\cos(2t) + \sin(3t))\right)$ *e* $F(x,y) = (1+\sin(2y))e^{3x-y}.$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) = 12$$

Esercizio 5. *Calcolare, al variare del parametro* $A \in \mathbb{R}$, *la matrice hessiana* H *della funzione* $F(x,y) = \dfrac{(Ax+\cos y)(1+x)}{1+\sin(xy)}$ *nel punto* $(0,0)$.

$$H = \begin{pmatrix} 2A & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Per quali valori di A *la matrice* H *è* **definita negativa**? $A < -\frac{1}{2}$.

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (2x - y^3)\,dx + (y^2 + x^3)\,dy$ *e sia* γ *la curva semplice chiusa e* C^1 *che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = B_{\sqrt{2}}(0,0)$ *in senso antiorario.*

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha = \int_\Omega d\alpha = 6\pi$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \left(2x - xy^2 - x^3\,,\, y + yx^2 + y^3\right)$.

Dato l'insieme $\Omega = B_1(0,0)$, *calcolare* $\displaystyle\iint_\Omega \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy = 3\pi$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^3 - y^2x^2 - yx^4.$$

Trovare i punti critici di F *in* $\mathbb{R}^2$. *Studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.*

Esercizio 9. *Trovare l'estremo superiore della funzione*

$$F(x,y,z) = x\,,$$

sull'insieme

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x+y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 \le 2\right\}.$$

Esercizio 10. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{xy\sqrt{x^2+y^2}}{4x^2 + y^2(x^2+y^2)} \quad ,$$

calcolare $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{y^{n+7}x^{n+4}}{(x^2+y^2+xy^2)^{2n}} \quad se\ (x,y) \ne (0,0)\,.$$

Per quali valori del parametro intero $n \ge 1$ *la funzione* F *è differenziabile in* $(0,0)$?

Es. 8: $F(x,y) = x^3 - y^2x^2 - yx^4.$

$$\begin{cases} \partial_x F = 3x^2 - 2xy^2 - 4yx^3 \\ \partial_y F = -2yx^2 - x^4 \end{cases}$$

(x,y) è un punto critico $\iff \begin{cases} \partial_x F(x,y) = 0 \\ \partial_y F(x,y) = 0 \end{cases}$

$\partial_y F(x,y) = 0 \implies x^2(2y + x^2) = 0$

Caso 1: $x = 0$ Caso 2: $y = -\frac{1}{2}x^2$

Nel caso 1, anche $\partial_x F = 0$. Quindi tutti i punti della forma $(x,y) = (0,y)$ sono punti critici.

Nel caso 2, abbiamo:

$$\partial_x F = 0 \implies 3x^2 - 2x\left(-\tfrac{1}{2}x^2\right)^2 - 4x^3\left(-\tfrac{1}{2}x^2\right) = 0$$
$$\implies 3x^2 - \frac{1}{2}x^5 + 2x^5 = 0$$
$$\implies 3x^2 + \frac{3}{2}x^5 = 0$$
$$\implies \frac{3}{2}x^2(2 + x^3) = 0$$

Quindi, per $x \neq 0$ (il caso $x = 0$ è stato studiato nel caso 1), abbiamo che $x = -\sqrt[3]{2}$, $y = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Calcoliamo ora la matrice hessiana di F:

$$\nabla^2 F(x,y) = \begin{pmatrix} 6x - 2y^2 - 12x^2y & -4xy - 4x^3 \\ -4xy - 4x^3 & -2x^2 \end{pmatrix}$$

(1) Nei punti critici della forma $(0,y)$, abbiamo

$$\nabla^2 F(0,y) = \begin{pmatrix} -2y^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ Quindi la matrice

$\nabla^2 F(0,y)$ è semi-definita negativa e l'analisi al secondo ordine non permette di stabilire il carattere dei punti critici.

2. Nel punto critico $(x,y) = \left(-\sqrt[3]{2}, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$

$$\nabla^2 F = \begin{pmatrix} 5\sqrt[3]{2} & 4 \\ 4 & -2^{5/3} \end{pmatrix}$$

In questo caso $\det(\nabla^2 F) = -10 - 16 < 0$.

Quindi, la matrice hessiana è indefinita e il punto $(2^{1/3}, -2^{-1/3})$ è un punto di sella.

Es. 9:

Esercizio 9. *Trovare l'estremo superiore della funzione*

$$F(x,y,z) = x\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; (x+y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 \leq 2\Big\}.$$

---

1. L'insieme D è compatto (vedi la correzione degli appelli precedenti).

2. $\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$. Quindi F non ha punti critici nella parte interna di D. Quindi, l'estremo superiore di F è raggiunto su un punto di bordo.

3. Per il teorema di Lagrange, i punti di massimo e di minimo di F su ∂D sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 1 = \lambda(2x+y-z) \\ 0 = \lambda(2y+x-z) \\ 0 = \lambda(2z-x-y) \\ 2 = (x+y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2 \end{cases}$$

Osserviamo che $\lambda \neq 0$. Quindi:

$$\begin{cases} 2y+x-z = 0 \\ 2z-x-y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+z = 0 \\ 2y+x-z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = 3z \end{cases}$$

Usando la quarta equazione, otteniamo:

$$2 = (2z)^2 + (-2z)^2 + (2z)^2$$

$$\Leftrightarrow 2 = 12z^2$$
$$\Leftrightarrow z^2 = \frac{1}{6} \Leftrightarrow z = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Quindi, le soluzioni del sistema sono due:

1) $(x,y,z) = \left(\frac{3}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

In questo caso $F = \frac{3}{\sqrt{6}}$

2) $(x,y,z) = \left(-\frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

In questo caso $F = -\frac{3}{\sqrt{6}}$.

Di conseguenza il massimo di F è $\frac{3}{\sqrt{6}}$.

Esercizio 10. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{xy\sqrt{x^2+y^2}}{4x^2+y^2(x^2+y^2)} \quad ,$$

calcolare $\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

In coordinate polari:

$$F(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^3\cos\theta\sin\theta}{4r^2\cos^2\theta + r^4\sin^2\theta}$$

$$= \frac{r\cos\theta\sin\theta}{4\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}.$$

Fissato $r>0$, studiamo la funzione

$$\theta \longmapsto F(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

I punti critici di questa funzione di una variabile sono le soluzioni di:

$$\partial_\theta\left[F(r\cos\theta, r\sin\theta)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \partial_\theta\left[r\cos\theta\sin\theta\right]\left(4\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\right)$$

$$- r\cos\theta\sin\theta \cdot \partial_\theta\left[4\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\right] = 0$$

$$\iff (\cos^2\theta - \sin^2\theta)(4\cos^2\theta + z^2\sin^2\theta)$$
$$- \cos\theta\sin\theta(-8\sin\theta\cos\theta + 2z^2\sin\theta\cos\theta) = 0$$

$$\iff (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\, 4\cos^2\theta + 8\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$+ z^2\left[(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin^2\theta - 2\sin^2\theta\cos^2\theta\right] = 0$$

$$\iff 4\cos^2\theta - z^2\sin^2\theta = 0$$

$$\iff 4\cos^2\theta - z^2(1 - \cos^2\theta) = 0$$

$$\iff \begin{cases} \cos^2\theta = \dfrac{z^2}{4+z^2} \\[2ex] \sin^2\theta = \dfrac{4}{4+z^2} \end{cases}$$

Quindi, i punti critici sono 4:

$$(\cos\theta, \sin\theta) = \left(\pm\frac{z}{\sqrt{4+z^2}}, \pm\frac{2}{\sqrt{4+z^2}}\right).$$

$$F(z\cos\theta, z\sin\theta) = \frac{z\cos\theta\sin\theta}{4\cos^2\theta + z^2\sin^2\theta}.$$

$$= \pm\frac{2z^2/(4+z^2)}{4\dfrac{z^2}{4+z^2} + z^2\dfrac{4}{4+z^2}}$$

$$= \pm\frac{2z^2}{8z^2} = \pm\frac{1}{4}.$$

Quindi $\sup_\theta F(z\cos\theta, z\sin\theta) = \frac{1}{4}$ e

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \lim_{r\to 0} \sup_{\theta} F(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{1}{4}.$$

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione*

$$F(0,0)=0 \qquad e \qquad F(x,y)=\frac{y^{n+7}x^{n+4}}{(x^2+y^2+xy^2)^{2n}} \quad se\ (x,y)\neq(0,0)\,.$$

Per quali valori del parametro intero $n\geq 1$ la funzione F è differenziabile in $(0,0)$?

1. Verificare che F è derivabile in $(0,0)$ e che

$$\begin{cases} \partial_x F(0,0) = 0 \\ \partial_y F(0,0) = 0 \end{cases}$$

2. Siccome $F(0,0) = \partial_x F(0,0) = \partial_y F(0,0)$, abbiamo che F è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 .$$

$$\frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y^{n+7}x^{n+4}}{(x^2+y^2+xy^2)^{2n}\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{y^{n+7}x^{n+4}}{(x^2+y^2)^{2n+1/2}} \cdot \left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+xy^2}\right)^{2n}$$

$$= \frac{y^{n+7}x^{n+4}}{(x^2+y^2)^{2n+1/2}} \left(\frac{1}{1+\frac{xy^2}{x^2+y^2}}\right)^{2n}$$

3. Verificare che $\frac{xy^2}{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

e dedurre che (per ogni $n \geq 1$)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{1}{1 + \frac{xy^2}{x^2+y^2}} \right)^{2n} = 1.$$

4. Passando in coordinate polari, mostrare

che $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^{n+7} x^{n+4}}{(x^2+y^2)^{\frac{4n+1}{2}}} = 0$$

se e solo se $2n + 11 > 4n + 1$

$\iff 10 > 2n$

$\iff 5 > n$.

Concludere che F è differenziabile

se e solo se $n = 1, 2, 3, 4$.