Prova scritta – 10/1/2023

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Consideriamo gli insiemi*

(A) $\Omega_A = \Big([0,3]\times[-2,2]\Big)\cap\Big([1,4]\times[-1,1]\Big)$; (D) $\Omega_D = \Big([0,3]\times[-2,2]\Big)\setminus\Big([1,4]\times[-1,1]\Big)$;

(B) $\Omega_B = \Big([0,3]\times[-2,2]\Big)\cup\Big([1,4]\times[-1,1]\Big)$; (E) $\Omega_E = \Big([0,3]\times[-2,2]\Big)\setminus\Big([1,4)\times(-1,1)\Big)$;

(C) $\Omega_C = \Big([0,3]\times[-2,2]\Big)\setminus\Big([1,4]\times(-1,1)\Big)$; (F) $\Omega_F = \Big([0,3]\times[-2,2]\Big)\setminus\Big((1,4]\times(-1,1)\Big)$.

Gli insiemi seguenti sono **compatti** *:*

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ x+y\geq 1\Big\}\cap\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2\leq 1\Big\}$$

$\partial D =$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$\dfrac{e^x\cos y}{\sqrt{1+xy}} =$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big(e^t\sin(2t)\,,\ (\cos t)^3\sin(3t)\Big)$ *e* $F(x,y) = \dfrac{\sin(3x+2y)+\sin(2x-3y)}{1+2xy}$.

$\dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) =$

Esercizio 5. *Calcolare la matrice hessiana H della funzione* $F(x,y)=\dfrac{1+\sin(xy)}{(1+x)(1-2y)}$ *in* $(0,0)$. *Dire se H è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.*

$H =$ *La matrice H è:*

Esercizio 6. *Sia* $\alpha=(x^3-y^3+x)\,dx+(2x^3+3xy^2-y)\,dy$ *e sia* γ *la curva semplice chiusa e* C^1 *che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega=\big\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\le 1\big\}$ *in senso antiorario.*
Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha =$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y)=\Big((3x-2y)\cos\big(\pi(x^2+y^2)\big)\,,\ \dfrac{2x+3y}{1+x^2+y^2}\Big)$.
Sulla palla B_R di centro $(0,0)$ e raggio $R=\sqrt{2}$, calcolare $\displaystyle\iint_{B_R}\mathrm{div}F(x,y)\,dx\,dy =$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y)=\frac{1}{3}y^3+x^2y+xy.$$

Trovare i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. *Trovare il massimo della funzione*

$$F(x,y,z)=x+y+z\,,$$

sull'insieme

$$D=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+(x-y)^2+z^2\le 1\Big\}.$$

Esercizio 10. *Data la funzione*

$$F(x,y)=\frac{xy^2\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+(x^2+y^2)^3}\qquad ,$$

calcolare $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0)=0\qquad e\qquad F(x,y)=\frac{(x-2y)^{2n}x^{2n+1}y^{n+3}}{(x^6+y^6)^n}\quad se\ (x,y)\neq(0,0),$$

dove $n\ge 1$ è un numero intero.

(1) *Per quali valori del parametro $n\ge 1$ la funzione è derivabile in $(0,0)$.*

(2) *Per quali valori del parametro $n\ge 1$ la funzione F è continua in $(0,0)$.*

(3) *Per quali valori del parametro $n\ge 1$ la funzione F è differenziabile in $(0,0)$.*
