Prova scritta – 17/4/2023

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

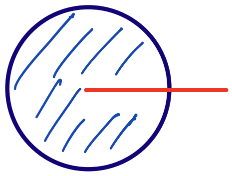
Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Consideriamo gli insiemi*

(A) $\Omega_A = B_1(0,0) \setminus \Big([0,2] \times \{0\}\Big)$; (D) $\Omega_D = \overline{B}_1(0,0) \setminus \Big([0,2] \times \{0\}\Big)$;

(B) $\Omega_B = B_1(0,0) \cup \Big([0,2] \times \{0\}\Big)$; (E) $\Omega_E = \overline{B}_1(0,0) \cup \Big([0,2] \times \{0\}\Big)$;

(C) $\Omega_C = B_1(0,0) \cap \Big([0,2] \times \{0\}\Big)$; (F) $\Omega_F = \overline{B}_1(0,0) \cap \Big([0,2] \times \{0\}\Big)$.



Gli insiemi seguenti sono **compatti :** E, F

Gli insiemi seguenti sono **aperti :** A

Gli insiemi seguenti non sono **né aperti, né compatti :** B, C, D

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < y \leq x - x^4\Big\}$$

$\partial D = \{(x,0) : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, x-x^4) : x \in [0,1]\}$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$$\frac{e^{x+y}\cos(x+y)}{\sqrt{1+xy}} = 1 + x + y - \frac{1}{2}xy + o(x^2+y^2)$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big(\big(1+\sin(3t)\big)^2 - (1+t^2)^3, \ \ln\big(1+\sin(2t)\big)\Big)$ *e* $F(x,y) = \dfrac{\sin(2x-y)}{\cos(x-2y)}$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) = \gamma'(0) \cdot \nabla F(\gamma(0)) = (6,2)\cdot(2,-1) = 10$$

Esercizio 5. *Calcolare, al variare del parametro* $A \in \mathbb{R}$, *la matrice hessiana* H *della funzione* $F(x,y) = \dfrac{(1+Ax)(1-Ay)}{\cos(x+y)}$ *in* $(0,0)$.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1-A^2 \\ 1-A^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Per quali valori di A *la matrice* H *è definita positiva?* $A \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (x^3 + y^3)\,dx + (y^3 - x^3)\,dy$ *e sia* γ *la curva semplice chiusa e* C^1 *che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = B_R(0,0)$ *in senso antiorario.*
Calcolare, in funzione del raggio $R > 0$, *l'integrale* $\displaystyle\int_\gamma \alpha = -\frac{3}{2}\pi R^4$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \left(\dfrac{2+x}{1+3(x^2+y^2)}, \dfrac{1+2y}{1+(x^2+y^2)^2} \right)$.

Sulla palla $B = \{(x,y) \;:\; x^2+y^2 \le 3\}$, *calcolare* $\displaystyle\iint_B \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy = \frac{9}{10}\pi$

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$F(x,y) = 0 \quad se \quad (x,y) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{x^{n+4}y^{2n+5}}{(x^2+y^2)^{2n+1}} \quad se \quad (x,y) \neq 0\,.$$

Per quali valori di $n \ge 1$ *la funzione* F *è differenziabile in* $(0,0)$*?* $n < 6$.

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 9. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^2y^2 + \frac{1}{3}y^3 - 4x^2.$$

Trovare i punti critici di F *in* $\mathbb{R}^2$, *studiare la matrice hessiana e dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.*

Esercizio 10. *Dati la funzione*

$$F(x,y,z) = xy\,,$$

e l'insieme

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 3x^2 + (y-x)^2 + (z-x)^2 \le 12\right\},$$

dire se l'estremo superiore $\sup\limits_D F$ *è raggiunto (e spiegare perché) e calcolarlo.*

Esercizio 11. *Dato* $\alpha \in \mathbb{R}$, *consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \frac{2xy\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^\alpha}{x^2\sqrt{x^2+y^2} + y^2}\,,$$

calcolare, in funzione del parametro α, $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$ *e* $\displaystyle\liminf_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Es. 9 (Risposte): $\begin{cases} \partial_x F = 2xy^2 - 8x \\ \partial_y F = 2x^2y + y^2 \end{cases}$

Punti critici: $(0,0)$; $(1,-2)$; $(-1,-2)$.

Matrice hessiana: $D^2F(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2-8 & 4xy \\ 4xy & 2x^2+2y \end{pmatrix}$

$D^2F(0,0)$ – semidefinita negativa

$\Rightarrow$ l'analisi al secondo ordine non permette di stabilire il carattere del punto $(0,0)$.

$F(0,y) = \frac{1}{3}y^3 \Rightarrow (0,0)$ è un punto di sella

---

$D^2F(1,-2)$ e $D^2F(-1,-2)$ sono indefinite.

Quindi $(1,-2)$ e $(-1,-2)$ sono punti di sella.

Es 10: D è un compatto (perché?) ed F è continua. Quindi, F ha un massimo in D.

- I punti critici nella parte interna $\mathrm{int}(D)$ sono della forma $(0,0,z)$. Siccome $F(0,0,z)=0$ il massimo di F non è raggiunto nella parte interna.

- Scriviamo il sistema di Lagrange:

$$\begin{cases} y = 2\lambda(5x-y-z) \\ x = 2\lambda(y-x) \\ 0 = 2\lambda(z-x) \\ 3x^2 + (y-x)^2 + (z-x)^2 = 12 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Siccome, } \max F \neq 0, \text{ cerchiamo solo i punti critici } (x,y,z) \text{ tali per cui } xy \neq 0.}$

$xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 0$.

$\Rightarrow \quad z = x \quad \Rightarrow$ abbiamo il sistema:

$$\begin{cases} y = 2\lambda(4x - y) \\ x = 2\lambda(y - x) \\ 3x^2 + (y-x)^2 = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{4x-y}{y} = \frac{y-x}{x} \Rightarrow x(4x-y) = y(y-x)$$

$$\Rightarrow 4x^2 = y^2$$

$$\Rightarrow y = \pm 2x$$

① $y = 2x \Rightarrow 3x^2 + x^2 = 12$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$y = \pm 2\sqrt{3}$$

$$F(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}) = F(-\sqrt{3}, -2\sqrt{3}) = 6$$

② $y = -2x \Rightarrow 3x^2 + 9x^2 = 12$

$$\Rightarrow x = \pm 1$$

$$y = \mp 2$$

$$F(1, -2) = F(-1, 2) = -2$$

Conclusione: $\begin{cases} \max\limits_{D} F = 6 \\ \min\limits_{D} F = -2 \end{cases}$

Es. 11

$$F(x,y)=\frac{2xy\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\alpha}}{x^2\sqrt{x^2+y^2}+y^2}\quad,\quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

$$F(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{2r^{2+\alpha}\cos\theta\sin\theta}{r^3\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \frac{2r^{\alpha}\cos\theta\sin\theta}{r\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

$$\partial_\theta\left[F(r\cos\theta, r\sin\theta)\right]=0$$

$$\Longleftrightarrow \left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\left(r\cos^2\theta+\sin^2\theta\right) - \cos\theta\sin\theta\left(-2r\sin\theta\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta\right)=0$$

$$\Longleftrightarrow r\cos^2\theta-\sin^2\theta=0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+r}\\[2mm] \sin^2\theta=\dfrac{r}{1+r}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\max\limits_{\theta}\left\{F(r\cos\theta, r\sin\theta)\right\} = \dfrac{2r^{\alpha}\dfrac{1}{\sqrt{1+r}}\cdot\dfrac{\sqrt{r}}{\sqrt{1+r}}}{\dfrac{r}{1+r}+\dfrac{r}{1+r}} = r^{\alpha-1/2}\\[4mm] \min\limits_{\theta}\left\{F(r\cos\theta, r\sin\theta)\right\} = -r^{\alpha-1/2}\end{cases}$$

Conclusione:

Se $\alpha > 1/2$, allora $\limsup\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \liminf\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = 0$

Se $\alpha = 1/2$, allora $\limsup F = 1$ e $\liminf F = -1$

Se $\alpha < -1/2$, allora $\limsup F = +\infty$ e $\liminf F = -\infty$.