Insiemi misurabili in $\mathbb{R}^n$

Definizioni

Definizione 1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme limitato. Diciamo che Ω è* **misurabile** *secondo Riemann, se la funzione*

$$\chi_\Omega(X) = \begin{cases} 1 & se \quad X \in \Omega, \\ 0 & se \quad X \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega, \end{cases}$$

è integrabile su un qualche rettangolo $\mathcal{R}$ contenente Ω. La misura di Ω è

$$|\Omega| = \int_{\mathcal{R}} \chi_\Omega(X)\, dX.$$

Inoltre, diciamo che Ω ha **misura nulla**, *se*

$$\Omega \quad \text{è misurabile} \quad \text{e} \quad |\Omega| = 0.$$

Esempio 2. *I domini normali e i domini regolari C^1 sono insiemi misurabili.*

Esempio 3. *Ogni insieme costituito da un numero finito di punti in $\mathbb{R}^d$ è un insieme di misura nulla.*

Esempio 4. *Un segmento in $\mathbb{R}^d$ è un insieme misurabile.*

Insiemi di misura nulla

Lemma 5. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme limitato e sia $\mathcal{R}$ un rettangolo contenente Ω. Allora sono equivalenti:*

(i) *Ω è misurabile e di misura nulla;*

(ii) *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $\mathcal{P} = \{R_{ij}\}_{i,j}$ di $\mathcal{R}$ tale che*

$$\sum_{\substack{R_{ij} \in \mathcal{P} \\ R_{ij} \cap \Omega \neq \emptyset}} |R_{ij}| < \varepsilon\,.$$

(iii) *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $\mathcal{P}$ di $\mathcal{R}$ tale che*

$$\sum_{\substack{R_{ij} \in \mathcal{Q} \\ \mathcal{R}_{ij} \cap \Omega \neq \emptyset}} |R_{ij}| < \varepsilon \quad \text{per ogni partizione} \quad \mathcal{Q} = \{R_{ij}\}_{i,j} \quad \text{più fine di} \quad \mathcal{P}\,.$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{S}(\mathcal{P})$ la somma superiore di Riemann (relativa alla funzione χ_Ω):

$$\mathcal{S}(\mathcal{P}) = \sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}} |R_{ij}| \sup_{R_{ij}} \chi_\Omega\,.$$

Siccome,

$$\sup_{R_{ij}} \chi_\Omega = \sup_{X \in R_{ij}} \chi_\Omega(X) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad R_{ij} \cap \Omega \neq \emptyset\,, \\ 0 & \text{if} \quad R_{ij} \cap \Omega = \emptyset\,. \end{cases}$$

otteniamo che

$$\mathcal{S}(\mathcal{P}) = \sum_{\substack{R_{ij} \in \mathcal{P} \\ R_{ij} \cap \Omega \neq \emptyset}} |R_{ij}|\,.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii). Per ipotesi, χ_Ω è integrabile e $\int_{\mathcal{R}} \chi_\Omega = 0$. Allora,

$$0 = \inf\Big\{\mathcal{S}(\mathcal{P}) \ : \ \mathcal{P} \ \text{partizione di} \ \mathcal{R}\Big\}.$$

Esiste quindi una partizione $\mathcal{P}$ tale che $\mathcal{S}(\mathcal{P}) < \varepsilon$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). È una conseguenza dal fatto che se $\mathcal{Q}$ è più fine di $\mathcal{P}$, allora $\mathcal{S}(\mathcal{Q}) \le \mathcal{S}(\mathcal{P})$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Osserviamo che per ogni partizione $\mathcal{P}$ si ha che $0 \le s(\mathcal{P}) \le \mathcal{S}(\mathcal{P})$.
Per ipotesi, per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, esiste una partizione $\mathcal{P}$ tale che $\mathcal{S}(\mathcal{P}) \le \varepsilon$. Di conseguenza,

$$0 \le \inf\Big\{s(\mathcal{P}) \ : \ \mathcal{P} \ \text{partizione di} \ \mathcal{R}\Big\} \le \inf\Big\{\mathcal{S}(\mathcal{P}) \ : \ \mathcal{P} \ \text{partizione di} \ \mathcal{R}\Big\} = 0. \qquad \square$$

Proposizione 6. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme limitato. Se Ω è di misura nulla, allora ogni suo sottoinsieme $\omega \subset \Omega$ è di misura nulla.*

Proposizione 7. *Siano Ω_1 e Ω_2 due insiemi limitati e di misura nulla in $\mathbb{R}^d$. Allora, anche $\Omega_1 \cup \Omega_2$ ha misura nulla. Di conseguenza, un'unione finita di insiemi di misura nulla è un insieme di misura nulla.*

Proposizione 8. *Siano Ω un insieme limitato, misurabile e di misura nulla in $\mathbb{R}^d$ e $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione limitata su Ω. Allora F è integrabile su Ω e* $\displaystyle\int_\Omega F(x)\,dx = 0$.

Una condizione sufficiente per la misurabilità di un insieme

Teorema 9. *Sia $D \subset \mathbb{R}^d$ un insieme limitato.*
Se la frontiera ∂D ha misura nulla, allora D è un insieme misurabile.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{R}$ un rettangolo che contiene ∂D.
Fissiamo $\varepsilon > 0$. Siccome ∂D ha misura nulla, esiste una partizione $\mathcal{P}$ di $\mathcal{R}$ tale che

$$\sum_{\substack{R_{ij}\,\in\,\mathcal{P}\\ R_{ij}\,\cap\,\partial D\,\neq\,\emptyset}} |R_{ij}| < \varepsilon\,.$$

Siano ora $\mathcal{S}(\mathcal{P})$ e $s(\mathcal{P})$ la somma superiore e la somma inferiore di Riemann della funzione indicatrice χ_D.

Sia ora R_{ij} un rettangolo della partizione $\mathcal{P}$ tale che

$$R_{ij} \cap D \neq \emptyset \quad \text{e} \quad R_{ij} \cap (\mathbb{R}^d \setminus D) \neq \emptyset\,.$$

Allora, necessariamente

$$R_{ij} \cap \partial D \neq \emptyset\,.$$

Quindi, dato un qualsiasi rettangolo R_{ij} della partizione $\mathcal{P}$ abbiamo che:

$$R_{ij} \subset D \qquad \text{oppure} \qquad R_{ij} \subset \mathbb{R}^d \setminus D \qquad \text{oppure} \qquad R_{ij} \cap \partial D \neq \emptyset\,.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P}) \le & \sum_{\substack{R_{ij}\,\in\,\mathcal{P}\\ R_{ij}\,\subset\,D}} |R_{ij}|\Big(\sup_{R_{ij}} \chi_D - \inf_{R_{ij}} \chi_D\Big)\\
& + \sum_{\substack{R_{ij}\,\in\,\mathcal{P}\\ R_{ij}\,\cap\,D\,=\,\emptyset}} |R_{ij}|\Big(\sup_{R_{ij}} \chi_D - \inf_{R_{ij}} \chi_D\Big)\\
& + \sum_{\substack{R_{ij}\,\in\,\mathcal{P}\\ R_{ij}\,\cap\,\partial D\,\neq\,\emptyset}} |R_{ij}|\Big(\sup_{R_{ij}} \chi_D - \inf_{R_{ij}} \chi_D\Big) = \sum_{\substack{R_{ij}\,\in\,\mathcal{P}\\ R_{ij}\,\cap\,\partial D\,\neq\,\emptyset}} |R_{ij}| \le \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

□

Corollario 10. *Siano*

$$f : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad \textit{e} \qquad g : [a,b] \to \mathbb{R}\,,$$

due funzioni continue tali che

$$f(x) \le g(x) \quad \textit{per ogni} \quad x \in [a,b].$$

Allora il dominio normale determinato dalle funzioni f e g,

$$D := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\Big\},$$

è misurabile secondo Riemann.

Corollario 11. *Sia*

$$\mathcal{R} = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_{n-1},b_{n-1}]$$

un rettangolo in $\mathbb{R}^{n-1}$ e siano $F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ e $G : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni continue tali che

$$F(x_1,\dots,x_{n-1}) \le G(x_1,\dots,x_{n-1}) \quad \textit{per ogni} \quad (x_1,\dots,x_{n-1}) \in \mathcal{R}.$$

Allora il dominio normale determinato dalle funzioni F e G,

$$D := \Big\{(x_1,\dots,x_{n-1},x_n) \in \mathbb{R}^n \ :\ (x_1,\dots,x_{n-1}) \in \mathcal{R},\ F(x_1,\dots,x_{n-1}) \le x_n \le G(x_1,\dots,x_{n-1})\Big\},$$

è misurabile secondo Riemann.