Area del grafico di una funzione di due variabili

Area di un triangolo in $\mathbb{R}^3$

Definizione 1. *Dato un triangolo $T_{A,B,C}$ con vertici A, B e C in $\mathbb{R}^3$, definiamo l'area di $T_{A,B,C}$ come*

$$\text{Area}\big(T_{A,B,C}\big) := \frac{1}{2}\big|(B-A)\wedge(C-A)\big|,$$

dove $(B-A)\wedge(C-A)$ è il prodotto vettoriale dei vettori $B-A$ e $C-A$.

Area del grafico di una funzione di due variabili

Sia $\mathcal{R} = [a,b]\times[c,d]$ un rettangolo in $\mathbb{R}^2$ e sia $F : \mathcal{R}\to\mathbb{R}$ una funzione tale che:

- F è continua su $\mathcal{R}$;
- fissato $x\in[a,b]$ abbiamo che per ogni $y\in(c,d)$ esiste la derivata parziale
$$\partial_y F(x,y) = \lim_{t\to 0}\frac{F(x,y+t)-F(x,y)}{t},$$
ed esistono le derivate
$$\partial_y F(x,c) = \lim_{t\to 0^+}\frac{F(x,c+t)-F(x,c)}{t} \qquad \text{e} \qquad \partial_y F(x,d) = \lim_{t\to 0^-}\frac{F(x,d+t)-F(x,d)}{t}\ ;$$
- fissato $y\in[c,d]$ abbiamo che per ogni $x\in(a,b)$ esiste la derivata parziale
$$\partial_x F(x,y) = \lim_{t\to 0}\frac{F(x+t,y)-F(x,y)}{t},$$
ed esistono le derivate
$$\partial_y F(a,y) = \lim_{t\to 0^+}\frac{F(a+t,y)-F(a,y)}{t} \qquad \text{e} \qquad \partial_y F(b+t,y) = \lim_{t\to 0^-}\frac{F(b+t,y)-F(b,y)}{t}\ ;$$
- le funzioni
$$\partial_x F : \mathcal{R}\to\mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \partial_y F : \mathcal{R}\to\mathbb{R}$$
sono funzioni continue.

Sia $\Phi : \mathcal{R}\to\mathbb{R}^3$ la funzione
$$\Phi(x,y) = \big(x,y,F(x,y)\big).$$
Inoltre, consideriamo i vettori $\partial_x\Phi$ e $\partial_y\Phi$ in $\mathbb{R}^3$ definiti come
$$\partial_x\Phi = \big(1,0,\partial_x F\big) \qquad \text{e} \qquad \partial_y\Phi = \big(0,1,\partial_y F\big).$$
Data una partizione
$$\mathcal{P} = \Big\{R_{ij}\ :\ i=0,\dots,n-1;\ j=0,\dots,m-1\Big\}$$
di $\mathcal{R}$ generata dalle partizioni
$$\mathcal{P}_{[a,b]} = \Big\{a=t_0<t_1<t_2<\dots<t_n=b\Big\},$$
$$\mathcal{P}_{[c,d]} = \Big\{c=s_0<s_1<s_2<\dots<s_m=d\Big\},$$
consideriamo le somme parziali
$$\mathcal{S}(\mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\Big(\text{Area}\Big(T_{\Phi(t_i,s_j),\Phi(t_{i+1},s_j),\Phi(t_i,s_{j+1})}\Big) + \text{Area}\Big(T_{\Phi(t_{i+1},s_{j+1}),\Phi(t_{i+1},s_j),\Phi(t_i,s_{j+1})}\Big)\Big).$$
Definiamo inoltre il diametro di $\mathcal{P}$ come
$$\text{diam}\big(\mathcal{P}\big) = \sup_{i,j}\Big\{\text{diam}\big(R_{ij}\big)\Big\},$$
dove
$$\text{diam}\big(R_{ij}\big) := \sqrt{\big|t_{i+i}-t_i\big|^2+\big|s_{j+1}-s_j\big|^2}\ .$$

Teorema 2. *Con le notazioni e le ipotesi di qui sopra, abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\operatorname{diam}\big(\mathcal{P}\big) < \delta \qquad \Rightarrow \qquad \left|\mathcal{S}(\mathcal{P}) - \iint_{\mathcal{R}} |\partial_x\Phi(x,y) \wedge \partial_y\Phi(x,y)|\,dx\,dy\right| < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Osserviamo che

$$\begin{aligned}
&\text{Area}\Big(T_{\Phi(t_i,s_j),\Phi(t_{i+1},s_j),\Phi(t_i,s_{j+1})}\Big)\\
&\quad= \frac{1}{2}\Big|\Big(\Phi(t_{i+1},s_j) - \Phi(t_i,s_j)\Big) \wedge \Big(\Phi(t_i,s_{j+1}) - \Phi(t_i,s_j)\Big)\Big|\\
&\quad= \frac{1}{2}\Big|\Big((t_{i+1}-t_i),\, 0,\, F(t_{i+1},s_j) - F(t_i,s_j)\Big) \wedge \Big(0,\, (s_{j+1}-s_j),\, F(t_i,s_{j+1}) - F(t_i,s_j)\Big)\Big|
\end{aligned}$$

Per il teorema di Lagrange, esistono

$$h_i \in (t_i, t_{i+1}) \qquad \text{e} \qquad k_j \in (s_j, s_{j+1})$$

tali che

$$F(t_{i+1},s_j) - F(t_i,s_j) = (t_{i+1}-t_i)\,\partial_x F(h_i,s_j) \qquad \text{e} \qquad F(t_i,s_{j+1}) - F(t_i,s_j) = (s_{j+1}-s_j)\,\partial_y F(t_i,k_j).$$

Allora,

$$\begin{aligned}
&\text{Area}\Big(T_{\Phi(t_i,s_j),\Phi(t_{i+1},s_j),\Phi(t_i,s_{j+1})}\Big)\\
&\quad= \frac{1}{2}\Big|\Big(\Phi(t_{i+1},s_j) - \Phi(t_i,s_j)\Big) \wedge \Big(\Phi(t_i,s_{j+1}) - \Phi(t_i,s_j)\Big)\Big|\\
&\quad= \frac{(t_{i+1}-t_i)(s_{j+1}-s_j)}{2}\Big|\Big(1,\, 0,\, \partial_x F(h_i,s_j)\Big) \wedge \Big(0,\, 1,\, \partial_y F(t_i,k_j)\Big)\Big|\\
&\quad= \frac{|R_{ij}|}{2}\Big|\Big(1,\, 0,\, \partial_x F(h_i,s_j)\Big) \wedge \Big(0,\, 1,\, \partial_y F(t_i,k_j)\Big)\Big|.
\end{aligned}$$

Per l'uniforme continuità delle funzioni $\partial_x F$ e $\partial_y F$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se il diametro di R_{ij} è più piccolo di δ, allora

$$|\partial_x\Phi(t_i,s_j) \wedge \partial_y\Phi(t_i,s_j)| - \varepsilon \leq \Big|\Big(1,\, 0,\, \partial_x F(h_i,s_j)\Big) \wedge \Big(0,\, 1,\, \partial_y F(t_i,k_j)\Big)\Big| \leq |\partial_x\Phi(t_i,s_j) \wedge \partial_y\Phi(t_i,s_j)| + \varepsilon.$$

Usando lo stesso ragionamento per il triangolo $T_{\Phi(t_{i+1},s_{j+1}),\Phi(t_{i+1},s_j),\Phi(t_i,s_{j+1})}$, e sommando su i e j, otteniamo

$$\left|\mathcal{S}(\mathcal{P}) - \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} |R_{ij}|\frac{|\partial_x\Phi(t_i,s_j) \wedge \partial_y\Phi(t_i,s_j)| + |\partial_x\Phi(t_{i+1},s_{j+1}) \wedge \partial_y\Phi(t_{i+1},s_{j+1})|}{2}\right| < \varepsilon|\mathcal{R}|.$$

Usando di nuovo l'uniforme continuità di

$$|\partial_x\Phi \wedge \partial_y\Phi| : \mathcal{R} \to \mathbb{R},$$

otteniamo che se la partizione $\mathcal{P}$ ha diametro più piccolo di un certo $\delta > 0$, abbiamo che

$$\left|\iint_{\mathcal{R}} |\partial_x\Phi(x,y) \wedge \partial_y\Phi(x,y)|\,dx\,dy - \sum_{i,j} |R_{ij}|\frac{|\partial_x\Phi(t_i,s_j) \wedge \partial_y\Phi(t_i,s_j)| + |\partial_x\Phi(t_{i+1},s_{j+1}) \wedge \partial_y\Phi(t_{i+1},s_{j+1})|}{2}\right| < \varepsilon|\mathcal{R}|,$$

il che conclude la dimostrazione. $\square$

Definizione 3. *Data una funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 ed un insieme limitato e misurabile secondo Riemann $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, definiamo* **l'area del grafico**

$$\Gamma = \Big\{\Phi(x,y) = (x,y,F(x,y)) \;:\; (x,y) \in \Omega\Big\},$$

della funzione $F : \Omega \to \mathbb{R}$ come

$$\text{Area}\,(\Gamma) := \iint_{\Omega} |\partial_x\Phi(x,y) \wedge \partial_y\Phi(x,y)|\,dx\,dy\,.$$

Più in generale, data una funzione continua e limitata $G : \Gamma \to \mathbb{R}$, definiamo l'integrale di G su Γ come

$$\int_{\Gamma} G := \iint_{\Omega} G\big(x,y,F(x,y)\big)\,\big|\partial_x\Phi(x,y) \wedge \partial_y\Phi(x,y)\big|\,dx\,dy.$$