Applicazioni della formula del cambiamento di variabili in integrali doppi

La formula del cambiamento di variabili in integrali doppi

Teorema 1. *Siano Ω_1 e Ω_2 due aperti in $\mathbb{R}^2$. Sia*
$$\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$$
un omeomorfismo con inversa
$$\Psi : \Omega_2 \to \Omega_1.$$
Supponiamo che sia Φ che Ψ sono di classe C^2 (rispettivamente come funzioni da Ω_1 in $\mathbb{R}^2$ e da Ω_2 in $\mathbb{R}^2$). Consideriamo un insieme D_2 limitato e misurabile (secondo Riemann) e tale che
$$\overline{D}_2 \subset \Omega_2,$$
ed una funzione continua e limitata
$$F : D_2 \to \mathbb{R}.$$
Allora, anche l'insieme $D_1 = \Psi(D_2) \subset \Omega_1$ è compatto e misurabile secondo Riemann e si ha la formula
$$\iint_{D_2} F(u, v)\, du\, dv = \iint_{D_1} F\big(\Phi(x, y)\big)\big|\det\big(D\Phi(x, y)\big)\big|\, dx\, dy.$$

Rotazioni di insiemi di $\mathbb{R}^2$

Definizione 2. *Una rotazione di $\mathbb{R}^2$ è una mappa*
$$\Phi_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$
della forma
$$\Phi_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$
dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è l'angolo di rotazione. Osserviamo, inoltre, che l'inversa di Φ_α è la mappa
$$\Phi_{-\alpha}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & \sin(-\alpha) \\ -\sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Proposizione 3. *Data una rotazione*
$$\Phi_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
ed un insieme limitato $D \subset \mathbb{R}^2$, abbiamo che D è misurabile secondo Riemann se e solo e lo è $\Phi_\alpha(D)$. Inoltre,
$$\text{Area}\,\big(\Phi_\alpha(D)\big) = \text{Area}\,(D).$$

Dimostrazione. Useremo la formula del cambio di varabili con
$$\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}^2\ ,$$
e con
$$\Phi(x, y) = \Phi_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$
Siccome,
$$D\Phi_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$
abbiamo che
$$\det\big(D\Phi_\alpha(x, y)\big) = \det\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \cos^2\alpha - (-\sin\alpha)\sin\alpha = 1.$$
Quindi, per la formula del cambio di variabili,
$$\text{Area}\,\big(\Phi_\alpha(D)\big) = \iint_{\Phi_\alpha(D)} 1\, du\, dv = \iint_D 1\big|\det\big(D\Phi_\alpha(x, y)\big)\big|\, dx\, dy = \text{Area}\,(D).$$
$\square$

Integrazione di funzioni dispari

Proposizione 4. *Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un compatto misurabile in $\mathbb{R}^2$, simmetrico rispetto all'asse y, ovvero tale che per un generico punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha*

$$(x, y) \in D \quad \Leftrightarrow \quad (-x, y) \in D.$$

Sia $F : D \to \mathbb{R}$ una funzione dispari nella prima variabile, ovvero tale che

$$F(-x, y) = -F(x, y) \quad \text{per ogni} \quad (x, y) \in D.$$

Allora

$$\iint_D F(x, y)\, dx\, dy = 0.$$

Dimostrazione. Useremo la formula del cambio di varabili con

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}^2 \ , \quad D_1 = D_2 = D \ ,$$

e con

$$\Phi(x, y) = (-x, y) \qquad \text{e} \qquad \Psi(u, v) = (-u, v).$$

Siccome

$$\det\big(D\Phi(x, y)\big) = -1,$$

abbiamo che

$$\iint_D F(u, v)\, du\, dv = \iint_{\Phi(D)} F(u, v)\, du\, dv = \iint_D F(-x, y)\big|\det\big(D\Phi(x, y)\big)\big|\, dx\, dy = -\iint_D F(x, y)\, dx\, dy,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che F sia dispari. $\square$

Area dell'ellisse

Proposizione 5. *Dati due parametri reali $a > 0$ e $b > 0$, consideriamo l'ellisse*

$$E_{a,b} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\Big\}.$$

Allora,

$$\mathrm{Area}\big(E_{a,b}\big) = \pi ab.$$

Dimostrazione. Useremo la formula del cambio di varabili con

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}^2 \ ,$$

e con

$$\Phi(x, y) = (ax, by).$$

Siccome

$$\det\big(D\Phi(x, y)\big) = \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab,$$

e siccome

$$\Phi(B_1) = E_{a,b},$$

abbiamo che

$$\mathrm{Area}\big(E_{a,b}\big) = \iint_{\Phi(B_1)} 1\, du\, dv = \iint_{B_1} \big|\det\big(D\Phi(x, y)\big)\big|\, dx\, dy = \iint_{B_1} ab\, dx\, dy = \pi ab.$$

$\square$

Area di un triangolo in $\mathbb{R}^2$

Triangoli in $\mathbb{R}^d$

Definizione 6. *Dati due punti A e B in $\mathbb{R}^d$, il* **segmento** $[A,B]$ *con estremi A e B è l'insieme*

$$[A,B] := \Big\{X = \alpha A + \beta B \ : \ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \alpha+\beta = 1\Big\}.$$

Si dice che il segmento è degenere se $A = B$.

Definizione 7. *Dati tre punti A, B, C in $\mathbb{R}^d$, il* **triangolo** $T_{A,B,C}$ *con vertici A, B, C è l'insieme*

$$T_{A,B,C} := \Big\{X = \alpha A + \beta B + \gamma C \ : \ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \gamma \geq 0,\ \alpha+\beta+\gamma = 1\Big\}.$$

Si dice che il triangolo $T_{A,B,C}$ è **degenere** *se i tre punti A, B e C giaciono sulla stessa retta, ovvero se i vettori $B - A$ e $C - A$ sono colineari.*

Osservazione 8 (Triangoli nel piano)**.** *Consideriamo un triangolo non-degenere $T_{A,B,C}$ in $\mathbb{R}^2$. Allora, la parte interna di $T_{A,B,C}$ è data da*

$$\text{int}\Big(T_{A,B,C}\Big) = \Big\{X = \alpha A + \beta B + \gamma C \in \mathbb{R}^2 \ : \ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0,\ \alpha+\beta+\gamma = 1\Big\},$$

mentre la frontiera è

$$\partial T_{A,B,C} = [A,B] \cup [B,C] \cup [A,C].$$

Esempio 9. *In $\mathbb{R}^2$ il triangolo T con vertici*

$$(0,0)\ ,\quad (1,0) \quad e \quad (0,1)$$

è l'insieme

$$T = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\Big\}.$$

Area di un triangolo in $\mathbb{R}^2$

Proposizione 10. *In $\mathbb{R}^2$ consideriamo un triangolo non-degenere $T_{A,B,C}$ con vertici*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad e \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Allora,

$$\text{Area}\big(T_{A,B,C}\big) = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{pmatrix}\right|.$$

Dimostrazione. Useremo la formula del cambio di varabili con

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}^2\ ,$$

e con

$$\Phi(x,y) = A + x(B-A) + y(C-A) = \begin{pmatrix} a_1 + x(b_1 - a_1) + y(c_1 - a_1) \\ a_2 + x(b_2 - a_2) + y(c_2 - a_2) \end{pmatrix}$$

Oserviamo che se T è il triangolo con vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$,

$$T = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\Big\},$$

allora

$$\Phi(T) = T_{A,B,C},$$

e

$$\det\big(D\Phi(x,y)\big) = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza, per la formula del cambio di variabili abbiamo che

$$\text{Area}\big(T_{A,B,C}\big) = \iint_{\Phi(T)} 1\,du\,dv = \iint_T \left|\det\begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{pmatrix}\right| dx\,dy = \text{Area}\,(T)\left|\det\begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{pmatrix}\right|.$$

Infine, basta calcolare l'area di T che per Fubini è data da

$$\text{Area}\,(T) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = \int_0^1 (1-x)\,dx = \frac{1}{2}. \quad \square$$