Integrazione in coordinate polari

Teorema 1. *Sia $F : \overline{B}_R \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita sulla palla chiusa di raggio R in $\mathbb{R}^2$. Allora,*

$$\begin{aligned}\iint_{B_R} F(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^R \int_0^{2\pi} F\big(r\cos\theta\,,\ r\sin\theta\big) r\,d\theta\,dr \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R F\big(r\cos\theta\,,\ r\sin\theta\big) r\ dr\,d\theta\ .\end{aligned}$$

Esempio 2 (Area di un disco in $\mathbb{R}^2$)**.** *Sia B_R il disco di raggio R in $\mathbb{R}^2$. Allora*

$$|B_R| = \int_0^{2\pi} \int_0^R r\,dr\,d\theta = \pi R^2.$$

Esempio 3. *Sia B_R il disco di raggio R in $\mathbb{R}^2$. Allora*

$$\int_{B_R} x^2\,dx\,dy = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2\cos^2\theta\,d\theta\,r\,dr = \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^R r^3\,dr\right) = \frac{\pi}{4}R^4.$$

Il volume di una palla in $\mathbb{R}^3$

Proposizione 4. *In dimensione 3, consideriamo la palla di centro $(0,0)$ e raggio R,*

$$B_R = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2 < R^2\Big\}.$$

Allora, il volume di B_R è dato da

$$|B_R| = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Proof. Osserviamo che possiamo scrivere B_R come

$$B_R = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2 \le R^2,\ -\sqrt{R^2-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{R^2-x^2-y^2}\Big\}\ .$$

Inoltre, indicheremo con D_R il disco di raggio R in $\mathbb{R}^2$, ovvero

$$D_R = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2 \le R^2\Big\}\ .$$

Per calcolare il volume di B_R usiamo la formula di Fubini:

$$|B_R| = \iiint_{B_R} 1\,dx\,dy\,dz = \iint_{D_R} dx\,dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} 1\,dz = 2\iint_{D_R} 2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Integrando in coordinate polari

$$x = r\cos\theta\ ,\quad y = r\sin\theta\ ,$$

otteniamo

$$\iint_{D_R} 2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy = 2\int_0^R \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2-r^2}\,d\theta\,r\,dr = 4\pi\int_0^R \sqrt{R^2-r^2}\,r\,dr$$

Usando il cambiamento di variabile $s = r^2$ abbiamo

$$4\pi\int_0^R \sqrt{R^2-r^2}\,r\,dr = 2\pi\int_0^{R^2} \sqrt{R^2-s}\,ds = 2\pi\int_0^{R^2} \sqrt{t}\,dt = 2\pi\frac{2}{3}\Big[t^{3/2}\Big]_0^{R^2} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

□

Esercizi

Esercizio 5. *Calcolare il volume dell'insieme $D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ 0 \le z \le 1-x^2-y^2\Big\}$.*

Esercizio 6. *Calcolare* $\displaystyle\iint_{B_R} \frac{(1+x)^2}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy\,.$