# Esercizio sulle forme chiuse

**Esercizio 1.** *Consideriamo la 1-forma*

$$\alpha = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy\,.$$

*Per ogni $(x,y) \in B_1$ definiamo la curva*

$$\sigma_{x,y} : [0,1] \to \mathbb{R}^2\ ,\quad \sigma(t) = \big(x + \cos t, y + \sin t\big)\ .$$

*Calcolare, al variare di $(x,y) \in B_1$ l'integrale $\displaystyle\int_{\sigma_{x,y}} \alpha$.*

**Soluzione.** Come conseguenza della proposizione seguente abbiamo che $\displaystyle\int_{\sigma_{x,y}} \alpha = 2\pi$. □

**Proposizione 2.** *Sia $\Omega$ un aperto in $\mathbb{R}^2$. Sia*

$$\alpha = F(x,y)\,dx + G(x,y)\,dy$$

*una 1-forme chiusa di classe $C^1$ su $\Omega$. Sia*

$$\sigma : [0,1] \to \Omega\ ,\quad \sigma(t) = \big(a(t), b(t)\big)\ ,$$

*una curva chiusa, di classe $C^1$. Per ogni*

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

*definiamo la curva*

$$\sigma_{x,y} : [0,1] \to \mathbb{R}^2\ ,\quad \sigma_{x,y}(t) = \big(x + a(t), y + b(t)\big)\ .$$

*Allora:*

(a) *esiste $\varepsilon > 0$, che dipende da $\sigma$ e $\Omega$, tale che*

$$\sigma_{x,y}(t) \in \Omega \quad \textit{per ogni} \quad t \in [0,1] \quad \textit{ed ogni} \quad (x,y) \in B_\varepsilon.$$

(b) *per ogni $(x,y) \in B_\varepsilon$, abbiamo che*

$$\int_{\sigma_{x,y}} \alpha = \int_\sigma \alpha.$$

**Dimostrazione.** Dimostriamo (b). Consideriamo la funzione

$$\Phi : B_\varepsilon \to \mathbb{R}\ ,\quad \Phi(x,y) = \int_{\sigma_{x,y}} \alpha\,.$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned}
\partial_x \Phi(x,y) &= \partial_x \int_0^1 \Big(F\big(x+a(t), y+b(t)\big)a'(t) + G\big(x+a(t), y+b(t)\big)b'(t)\Big)\,dt \\
&= \int_0^1 \partial_x \Big(F\big(x+a(t), y+b(t)\big)a'(t) + G\big(x+a(t), y+b(t)\big)b'(t)\Big)\,dt \\
&= \int_0^1 \Big(\partial_x F\big(x+a(t), y+b(t)\big)a'(t) + \partial_x G\big(x+a(t), y+b(t)\big)b'(t)\Big)\,dt.
\end{aligned}$$

Ora siccome la forma $\alpha$ è chiusa

$$\partial_y F = \partial_x G \quad \text{su} \quad \Omega,$$

e quindi otteniamo

$$\begin{aligned}
\partial_x \Phi(x,y) &= \int_0^1 \Big(\partial_x F\big(x+a(t), y+b(t)\big)a'(t) + \partial_y F\big(x+a(t), y+b(t)\big)b'(t)\Big)\,dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big[F\big(x+a(t), y+b(t)\big)\Big]\,dt = \Big[F\big(x+a(t), y+b(t)\big)\Big]_0^1 = 0.
\end{aligned}$$

□