

1-forme chiuse in aperti stellati

APERTI STELLATI

Definizione 1. Diciamo che l'insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ è stellato rispetto al punto $x_0 \in \Omega$, se ha la proprietà seguente. Per ogni $x \in \Omega$ il segmento che collega x_0 a x sta in Ω :

$$tx_0 + (1-t)x \in \Omega \quad \text{per ogni} \quad t \in [0, 1].$$

Esempio 2. Gli insiemi convessi sono stellati.

Esempio 3. I rettangoli sono insiemi stellati.

Esempio 4. L'insieme $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < \sqrt{1+x^2}\}$ è stellato.

SU UN APERTO STELLATO LE FORME CHIUSE SONO ESATTE

Teorema 5 (Chiusa \Rightarrow esatta). Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n , stellato rispetto al punto $X_0 \in \Omega$. Ogni 1-forma α , chiusa e di classe C^1 su Ω , è esatta.

Definizione. Consideriamo la 1-forma

$$\alpha := a_1(X) dx_1 + a_2(X) dx_2 + \cdots + a_n(X) dx_n,$$

e definiamo il campo vettoriale

$$A(X) = (a_1(X), \dots, a_n(X)),$$

associato ad α . Siccome la forma è chiusa, abbiamo che $d\alpha = 0$ ovvero

$$\begin{aligned} 0 = d\alpha &= d\left(a_1(X) dx_1 + \cdots + a_n(X) dx_n\right) \\ &= \sum_{i=1}^n da_i \wedge dx_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i, \end{aligned}$$

il che implica che per ogni coppia di indici $i \neq j$, abbiamo

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Fissiamo un punto $X_0 \in \Omega$ e per ogni $X \in \Omega$ definiamo la funzione

$$F(X) := \int_{\gamma} \alpha,$$

dove

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega, \quad \gamma(t) = (1-t)X_0 + tX.$$

Per la definizione di integrale di una 1-forma su una curva, abbiamo

$$\begin{aligned} F(X) &= \int_0^1 A(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^1 A((1-t)X_0 + tX) \cdot (X - X_0) dt. \end{aligned}$$

Derivando sotto il segno dell'integrale rispetto alla variabile x_j , abbiamo

$$\begin{aligned}
 \partial_{x_j} F(X) &= \int_0^1 \partial_{x_j} \left(\sum_{i=1}^n a_i((1-t)X_0 + tX)(x_i - x_{0i}) \right) dt \\
 &= \int_0^1 \left(a_j((1-t)X_0 + tX) + \sum_{i=1}^n t \frac{\partial a_i}{\partial x_j}((1-t)X_0 + tX)(x_i - x_{0i}) \right) dt \\
 &= \int_0^1 \left(a_j((1-t)X_0 + tX) + \sum_{i=1}^n t \frac{\partial a_j}{\partial x_i}((1-t)X_0 + tX)(x_i - x_{0i}) \right) dt \\
 &= \int_0^1 \left(a_j((1-t)X_0 + tX) + t \frac{\partial}{\partial t} [a_j((1-t)X_0 + tX)] \right) dt \\
 &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} [t a_j((1-t)X_0 + tX)] dt = a_j(X).
 \end{aligned}$$

Quindi $dF = \alpha$ il che conclude la dimostrazione. □

Corollario 6. *In una palla $B_r(X_0) \subset \mathbb{R}^n$, di centro $X_0 \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$, ogni 1-forma chiusa è esatta.*

Corollario 7. *In un rettangolo aperto*

$$\mathcal{R} = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n,$$

ogni 1-forma chiusa è esatta.