

Le forme esatte sono chiuse

LE 1-FORME ESATTE SONO CHIUSE

Teorema 1 (Esatta \Rightarrow chiusa per le 1-forme). Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n e sia

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

una funzione di classe C^2 . Allora la 1-forma differenziale df è chiusa.

Dimostrazione in dimensione due. Consideriamo prima il caso $n = 2$. Allora $f = f(x, y)$ e

$$df = \partial_x f(x, y) dx + \partial_y f(x, y) dy.$$

Allora

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\partial_x f(x, y) dx + \partial_y f(x, y) dy\right) \\ &= d(\partial_x f) \wedge dx + d(\partial_y f) \wedge dy \\ &= \left(\partial_{xx} f(x, y) dx + \partial_{yx} f(x, y) dy\right) \wedge dx + \left(\partial_{xy} f(x, y) dx + \partial_{yy} f(x, y) dy\right) \wedge dy \\ &= \partial_{yx} f(x, y) dy \wedge dx + \partial_{xy} f(x, y) dx \wedge dy \\ &= \left(-\partial_{yx} f(x, y) + \partial_{xy} f(x, y)\right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Per il Teorema di Schwarz abbiamo che $\partial_{yx} f(x, y) = \partial_{xy} f(x, y)$. □

Dimostrazione in dimensione n . Siano $X = (x_1, \dots, x_n)$ e $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Allora

$$df = \sum_{i=1}^n \partial_i f(X) dx_i.$$

Ora calcoliamo

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum_{i=1}^n \partial_i f(X) dx_i\right) = \sum_{i=1}^n d(\partial_i f) \wedge dx_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \partial_j \partial_i f(X) dx_j\right) \wedge dx_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_j \partial_i f(X) dx_j \wedge dx_i. \end{aligned}$$

Ora siccome $dx_i \wedge dx_i = 0$ possiamo scrivere

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_j \partial_i f(X) dx_j \wedge dx_i = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \partial_j \partial_i f(X) dx_j \wedge dx_i + \sum_{1 \leq j < i \leq n} \partial_j \partial_i f(X) dx_j \wedge dx_i.$$

Nella seconda sommatoria scambiamo le variabili i e j , cioè scriviamo i al posto di j e j al posto di i . Quindi

$$\sum_{1 \leq j < i \leq n} \partial_j \partial_i f(X) dx_j \wedge dx_i = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \partial_i \partial_j f(X) dx_i \wedge dx_j.$$

In conclusione, usando l'identità $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$, otteniamo che

$$\begin{aligned} d(df) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_j \partial_i f(X) dx_j \wedge dx_i \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \partial_j \partial_i f(X) dx_j \wedge dx_i - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \partial_i \partial_j f(X) dx_j \wedge dx_i \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\partial_j \partial_i f(X) - \partial_i \partial_j f(X)\right) dx_j \wedge dx_i = 0, \end{aligned}$$

dove abbiamo di nuovo usato il teorema di Schwarz. □

 FORME DIFFERENZIALI DI ORDINE SUPERIORE

Teorema 2 (Esatta \Rightarrow chiusa). *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n e sia α una k -forma di classe C^2 su Ω . Allora la $(k+1)$ -forma differenziale $d\alpha$ è chiusa.*

Dimostrazione: Dal teorema precedente, segue che se α è una 0-forma (quindi una funzione), allora la 1-forma $d\alpha$ è chiusa. Dimosteremo il teorema partendo da una 1-forma α in \mathbb{R}^3 . Questo concluderebbe la dimostrazione del teorema per le k -forme in \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 . Il caso generale (per una k -forma in \mathbb{R}^n) è analogo.

Consideriamo quindi la 1-forma

$$\alpha = a(x, y, z) dx + b(x, y, z) dy + c(x, y, z) dz.$$

Dimosteremo che la 2-forma $d\alpha$ è chiusa.

$$\begin{aligned} d\alpha &= d\left(a(x, y, z) dx + b(x, y, z) dy + c(x, y, z) dz\right) \\ &= da \wedge dx + db \wedge dy + dc \wedge dz \\ &= \left(\partial_x a dx + \partial_y a dy + \partial_z a dz\right) \wedge dx \\ &\quad + \left(\partial_x b dx + \partial_y b dy + \partial_z b dz\right) \wedge dy \\ &\quad + \left(\partial_x c dx + \partial_y c dy + \partial_z c dz\right) \wedge dz \\ &= \partial_y a dy \wedge dx + \partial_z a dz \wedge dx \\ &\quad + \partial_x b dx \wedge dy + \partial_z b dz \wedge dy \\ &\quad + \partial_x c dx \wedge dz + \partial_y c dy \wedge dz \\ &= \left(\partial_x b - \partial_y a\right) dx \wedge dy + \left(\partial_z a - \partial_x c\right) dz \wedge dx + \left(\partial_y c - \partial_z b\right) dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Ora, calcoliamo $d(d\alpha)$.

$$\begin{aligned} d(d\alpha) &= d\left(\left(\partial_x b - \partial_y a\right) dx \wedge dy + \left(\partial_z a - \partial_x c\right) dz \wedge dx + \left(\partial_y c - \partial_z b\right) dy \wedge dz\right) \\ &= d\left(\partial_x b - \partial_y a\right) \wedge dx \wedge dy + d\left(\partial_z a - \partial_x c\right) \wedge dz \wedge dx + d\left(\partial_y c - \partial_z b\right) \wedge dy \wedge dz \\ &= \partial_z\left(\partial_x b - \partial_y a\right) dz \wedge dx \wedge dy + \partial_y\left(\partial_z a - \partial_x c\right) dy \wedge dz \wedge dx + \partial_x\left(\partial_y c - \partial_z b\right) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$dz \wedge dx \wedge dy = (dz \wedge dx) \wedge dy = (-dx \wedge dz) \wedge dy = -dx \wedge (dz \wedge dy) = -dx \wedge (-dy \wedge dz) = dx \wedge dy \wedge dz.$$

Analogamente

$$dy \wedge dz \wedge dx = dx \wedge dy \wedge dz.$$

Quindi,

$$\begin{aligned} d(d\alpha) &= \partial_z\left(\partial_x b - \partial_y a\right) dx \wedge dy \wedge dz + \partial_y\left(\partial_z a - \partial_x c\right) dx \wedge dy \wedge dz + \partial_x\left(\partial_y c - \partial_z b\right) dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \left(\partial_{zx} b - \partial_{zy} a + \partial_{yz} a - \partial_{yx} c + \partial_{xy} c - \partial_{xz} b\right) dx \wedge dy \wedge dz = 0. \end{aligned} \quad \square$$

 ESEMPIO DI UNA FORMA CHIUSA CHE NON È ESATTA

Le forme esatte sono sempre forme chiuse (vedi Teorema 2),
ma esistono forme chiuse che non sono esatte! Per esempio, la 1-forma

$$\alpha = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

è chiusa, ma non esatta su $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.