Prova scritta – Dicembre 2021

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Matricola:

Regole generali

Per raggiungere la sufficienza, bisogna:

- Rispondere correttamente ad almeno **6 domande di Parte 1**.
- Raggiungere un punteggio globale (Parte 1 + Parte 2) di **18 punti su 30**.

Gli esercizi della Parte 2 saranno valutati solo se il candidato ha risposto correttamente ad almeno 6 delle domande della Parte 1.

Parte 1

(Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^2$.

$(A)\quad A = \Big\{(x,y)\ :\ x^2+3y^2>1\Big\}$ $\qquad (B)\quad B = \Big\{(x,y)\ :\ x^2<y^2<x^2+1\Big\}$

$(C)\quad C = \Big\{(x,y)\ :\ x^2<y<x\Big\}$ $\qquad (D)\quad D = \Big\{(x,y)\ :\ x^2+3y^2<1\Big\}\setminus\Big\{(x,y)\ :\ x\geq 0\Big\}$

$(E)\quad E = \Big\{(x,y)\ :\ x^2+3y^2<1\Big\}\cap\Big\{(x,y)\ :\ x>0\Big\}$

Gli insiemi seguenti sono **aperti** : A, B, C, D, E

Gli insiemi seguenti sono **chiusi** : ———

Esercizio 2. *Consideriamo le seguenti funzioni di due variabili.*

$(A)\quad A(x,y) = -x^2-y^2$ $\qquad (B)\quad B(x,y) = x^2-y^2+2xy$

$(C)\quad C(x,y) = x^4+y^2$ $\qquad (D)\quad D(x,y) = xy^2$ $\qquad (E)\quad E(x,y) = -x^2-y^2-8xy$

Le seguenti funzioni hanno un **massimo relativo** in $(0,0)$: A

Le seguenti funzioni hanno un **minimo relativo** in $(0,0)$: C

Le seguenti funzioni hanno un **punto di sella** in $(0,0)$: B, D, E

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in zero la funzione* $\dfrac{1}{1-(1-2x)\sin y}$.

$$\frac{1}{1-(1-2x)\sin y} = 1 + y - 2xy + y^2 + o(|x,y|^2)$$

Esercizio 4. *Calcolare la derivata* $\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} F(\gamma(t))$*, dove:*

$$\gamma(t) = \Big(\sin(2t) - \sin(3t)\,,\ \sin(2t - t^3)\Big) \qquad e \qquad F(x,y) = \sin(2x+y) + \sin(x-3y).$$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(\gamma(t)) = (-1,2)\cdot(3,-2) = -7$$

Esercizio 5. *Trovare tutti i punti critici della funzione* $F(x,y) = \dfrac{x^2+yx}{1+y^2}$ *in* $\mathbb{R}^2$.

I punti critici sono: $(0,0)$

Esercizio 6. *Calcolare la matrice hessiana* H *della funzione* $F(x,y) = \dfrac{\cos(x-y)}{1+y^2}$ *nel punto* $(0,0)$. *Dire se* H *è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa o indefinita.*

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

La matrice H *è:* definita negativa

Esercizio 7. *Calcolare l'area dell'insieme* $\Omega = \Big\{(x,y)\ :\ 0 \le x^5 \le y \le x\Big\}$.

"Area di Ω"= $\dfrac{1}{3}$

Esercizio 8. *Dato il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \left(\frac{2x-y}{x^2+y^2+1}\,,\ \frac{y+3x}{x^2+y^2+1}\right),$$

calcolare l'integrale della divergenza di F *sulla palla di raggio 1 e centro* $(0,0)$ *in* $\mathbb{R}^2$.

$$\iint_{B_1} \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy = \frac{3}{2}\pi$$

Esercizio 9. *Per quali valori del parametro* $c \in \mathbb{R}$ *la forma* $\alpha = c\big(8x + xy\big)\,dx + x^2\,dy$ *è chiusa?*

$c = 2$

Parte 2

Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 10. *Per i valori del parametro c trovati nell'esercizio precedente (Esercizio 9), calcolare l'integrale della forma α sulla curva*

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 , \qquad \gamma(t) = \left(\frac{2t}{1+t^3},\ \cos\big(t(t-1)\big) \right).$$

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^3 - 3xy + y^2.$$

Trovare (se esistono!) i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice Hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 12. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{y}{x + \sqrt{1 + 2x^2 + 2y^2}}$$

calcolare $\limsup\limits_{|(x,y)|\to\infty} F(x,y)$.

Esercizio 13. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} \quad se\ (x,y) \neq (0,0).$$

(1) *Dire se F è derivabile in zero e calcolare, se esiste il gradiente $\nabla F(0,0) = (0,0)$.*

(2) *Dire se F è derivabile su $\mathbb{R}^2$ e determinare se le sue derivate parziali $\partial_x F$ e $\partial_y F$ sono funzioni continue su $\mathbb{R}^2$.*

(3) *Dire se F è differenziabile in zero.*

(4) *Dire se F è continua su $\mathbb{R}^2$.*

(5) *Calcolare, al variare del vettore $V = (a,b) \neq (0,0)$, la derivata direzionale*

$$\partial_V F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(tV).$$

---

(10) $\alpha = (16x + 2xy)\,dx + x^2 dy$

α è una forma chiusa su $\mathbb{R}^2$. Siccome $\mathbb{R}^2$ è stellato, α è anche esatta.

Si ha quindi che esiste un potenziale $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

tale che $dF = \alpha$. In particolare, l'integrale di α su una qualsiasi curva $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dipende solo dagli estremi. Precisamente,

$$\int_\sigma \alpha = \int_0^1 \sigma'(t) \cdot \nabla F(\sigma(t))\, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big[F(\sigma(t))\Big]\, dt$$

$$= F(\sigma(1)) - F(\sigma(0)).$$

In particolare, possiamo sostituire la curva

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \left(\frac{2t}{1+t^3},\ \cos\big(t(t-1)\big)\right).$$

con la curva

$$\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^2\,, \quad \sigma(t) = (t, 1).$$

Quindi

$$\int_\gamma \alpha = F(1,1) - F(0,1) = \int_\sigma \alpha$$

$$= \int_0^1 \sigma'(t) \cdot \alpha(\sigma(t))\, dt = \int_0^1 (1,0) \cdot (16t + 2t, t^2)\, dt$$

$$= \int_0^1 18t\, dt = 9.$$

(11) Consideriamo la funzione

$$F(x,y) = x^3 - 3xy + y^2$$

$$\begin{cases} \partial_x F(x,y) = 3x^2 - 3y \\ \partial_y F(x,y) = -3x + 2y \end{cases}$$

Quindi: $\begin{cases} \partial_x F(x,y) = 0 \\ \partial_y F(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = y \\ -3x + 2x^2 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x^2 = y \\ x(2x-3) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Le soluzioni sono: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3/2 \\ 9/4 \end{pmatrix}$.

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$\partial_{xx} F = 6x$$

$$\partial_{yy} F = 2$$

$$\partial_{xy} F = -3$$

$$\Rightarrow D^2 F(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

- Nel punto $(0,0)$

$$D^2 F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(D^2 F(0,0)\right) = -9 < 0$$

Quindi la matrice $D^2F(0,0)$ è indefinita e $(0,0)$ è un punto di sella.

- Nel punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$, $D^2F\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right) = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det\left(D^2F\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{9}{4}\right)\right) = 18 - 9 = 9 > 0$$

$$\operatorname{tr}\left(D^2F\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{9}{4}\right)\right) = 11 > 0$$

$\Rightarrow D^2F\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ è definita positiva

$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ è un punto di minimo relativo.

---

(12) Consideriamo la funzione $F(x,y) = \dfrac{y}{x + \sqrt{1 + 2x^2 + 2y^2}}$.

In coordinate polari, abbiamo

$$F(R\cos\Theta, R\sin\Theta) = \frac{R\sin\Theta}{R\cos\Theta + \sqrt{1+2R^2}}.$$

Fissiamo $R > 0$ e calcoliamo

$$\partial_\Theta\left[\frac{R\sin\Theta}{R\cos\Theta + \sqrt{1+2R^2}}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow R\cos\Theta\left[R\cos\Theta + \sqrt{1+2R^2}\right] - R\sin\Theta\left(-R\sin\Theta\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow R^2 + R\cos\Theta\sqrt{1+2R^2} = 0$$

$$\iff \quad \cos\theta = -\frac{R}{\sqrt{1+2R^2}}.$$

Quindi

$$\sin^2\theta = 1 - \frac{R^2}{1+2R^2} = \frac{1+R^2}{1+2R^2}.$$

e

$$\max_{\theta\in[0,2\pi]} F(R\cos\theta, R\sin\theta) =$$

$$= \frac{R\sqrt{\frac{1+R^2}{1+2R^2}}}{\frac{-R^2}{\sqrt{1+2R^2}} + \sqrt{1+2R^2}}$$

$$= \frac{R\sqrt{1+R^2}}{1+R^2} = \frac{R}{\sqrt{1+R^2}}.$$

Di conseguenza

$$\limsup_{|(x,y)|\to+\infty} F(x,y) = \limsup_{R\to+\infty}\left\{\sup_{\theta} F(R\cos\theta, R\sin\theta)\right\}$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \frac{R}{\sqrt{1+R^2}} = 1.$$

(13) Consideriamo la funzione

$$F(0,0)=0 \qquad e \qquad F(x,y)=\frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} \quad se\ (x,y)\neq(0,0).$$

<u>Derivabilità di F in $(0,0)$</u>:

Per definizione,

$$\begin{cases} \partial_x F(0,0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{\overset{0}{\overset{\shortparallel}{F(x,0)}} - \overset{0}{F(0,0)}}{x} = 0 \\ \partial_y F(0,0) = \lim_{y\to 0} \dfrac{F(0,y)-F(0,0)}{y} = 0 \end{cases}$$

Quindi, la funzione F è derivabile in $(0,0)$ e

$$\nabla F(0,0) = (0,0).$$

<u>Continuità di F</u>: In $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ la funzione F è continua perché è il rapporto di due funzioni continue. Per dimostrare la continuità di F in $(0,0)$, osserviamo che

$$|F(x,y)| = \left|\frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\cdot|x+y| \leq \frac{1}{2}|x+y|$$

Quindi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |F(x,y)| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}|x+y| = 0.$

(In alternativa, si possono usare le coordinate polari. Infatti

$$F(R\cos\theta, R\sin\theta) = R\cos\theta\sin\theta(\cos\theta + \sin\theta)$$

Siccome $|\cos\theta| \le 1$ e $|\sin\theta| \le 1$,

$$|F(R\cos\theta, R\sin\theta)| \le 2R.$$

Quindi $\lim_{R\to 0}\left\{\sup_{\theta} |F(R\cos\theta, R\sin\theta)|\right\} \le \lim_{R\to 0} 2R = 0.$)

Questo conclude la dimostrazione di (4).

(3) Differenziabilità di F in $(0,0)$.

Siccome $DF(0,0) = (0,0)$ e $F(0,0) = 0$, abbiamo che F è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|F(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

ovvero, se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy(x+y)|}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} = 0.$$

Prendendo per esempio la successione $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F(x_n,y_n)}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{x_n y_n (x_n+y_n)}{(x_n^2+y_n^2)^{3/2}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1/n\cdot 1/n\cdot(1/n+1/n)}{\left((1/n)^2+(1/n)^2\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{2}{2^{3/2}} \neq 0.$$

Quindi F non è differenziabile in zero.

In alternativa, possiamo usare le coordinate polari. Infatti,

$$\frac{F(R\cos\theta, R\sin\theta)}{R} = \cos\theta\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta).$$

Siccome questa funzione non è costante in θ, abbiamo che

$$\sup_\theta \frac{F(R\cos\theta, R\sin\theta)}{R} = M$$

$$\inf_\theta \frac{F(R\cos\theta, R\sin\theta)}{R} = m$$

e $M \neq m$. Di conseguenza

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)}\frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = M \neq m = \liminf_{(x,y)\to(0,0)}\frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Quindi, il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ non esiste

e la funzione F non è differenziabile

in 0. Come conseguenza otteniamo che

le derivate parziali $\partial_x F$ e $\partial_y F$ non

sono funzioni continue su $\mathbb{R}^2$ (altrimenti,

per il teorema del differenziale

totale si avrebbe che F è differenziabile in $(0,0)$).

5 La derivata direzionale

$\partial_v F(0,0)$ è data da:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(ta,tb) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{at \cdot bt \cdot (at+bt)}{t^2a^2+t^2b^2}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{tab(a+b)}{a^2+b^2} = \frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}.$$

Oss: Siccome <u>non</u> vale la formula

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(tv) = v \cdot \underbrace{DF(0,0)}_{=0}$$

abbiamo un'altra dimostrazione del fatto

che F non è differenziabile in $(0,0)$.