# Prova scritta – Dicembre 2021

**Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...**

**Nome:**

**Cognome:**

**Matricola:**

## Regole generali

**Per raggiungere la sufficienza**, bisogna:

- Rispondere correttamente ad almeno **6 domande di Parte 1**.
- Raggiungere un punteggio globale (Parte 1 + Parte 2) di **18 punti su 30**.

**Gli esercizi della Parte 2 saranno valutati solo se il candidato ha risposto correttamente ad almeno 6 delle domande della Parte 1.**

## Parte 1

**(Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)**

**Esercizio 1.** *Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^2$.

$(A)$ $A = \left\{(x,y) \ : \ x^2 + 3y^2 \le 1\right\}$ $(B)$ $B = \left\{(x,y) \ : \ x^2 \le y^2 \le x^2 + 1\right\}$

$(C)$ $C = \left\{(x,y) \ : \ x^2 \le y \le x\right\}$ $(D)$ $D = \left\{(x,y) \ : \ x^2+3y^2 \le 1\right\} \setminus \left\{(x,y) \ : \ x = 0\right\}$

$(E)$ $E = \left\{(x,y) \ : \ x^2 + 3y^2 \le 1\right\} \cap \left\{(x,y) \ : \ x = 0\right\}$

2 punti (1 punto, se c'è un solo errore)

Gli insiemi seguenti sono **compatti** : A, C, E

Gli insiemi seguenti sono **chiusi ma non compatti** : B

**Esercizio 2.** *Consideriamo le seguenti funzioni di due variabili.*

$(A)$ $A(x,y) = 2x^2 - y^2$ $(B)$ $B(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$

$(C)$ $C(x,y) = x^4 - y^4$ $(D)$ $D(x,y) = xy$ $(E)$ $E(x,y) = x^2y^2$

2 punti (1 punto, se c'è un solo errore)

Le seguenti funzioni hanno un **minimo relativo** in $(0,0)$ : B, E

Le seguenti funzioni hanno un **massimo relativo** in $(0,0)$ : ——

Le seguenti funzioni hanno un **punto di sella** in $(0,0)$ : A, C, D

**Esercizio 3.** *Sviluppare fino al secondo ordine in zero la funzione* $\dfrac{1}{1+(1+x)\sin y}$.

$$\frac{1}{1+(1+x)\sin y} = 1 - y - xy + y^2 + o(|(x,y)|^2)$$

2 punti

---

**Esercizio 4.** *Calcolare la derivata* $\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} F(\gamma(t))$, *dove:*

$$\gamma(t) = \Big(\cos(3t) - e^{2t}\,,\ \sin(4t+t^3)\Big) \qquad e \qquad F(x,y) = \sin(2x-y) + \sin(x+3y).$$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(\gamma(t)) = (-2,4)\cdot(3,2) = 2$$

$\gamma'(0) \cdot DF(\gamma(0))$

2 punti

---

**Esercizio 5.** *Trovare tutti i punti critici della funzione* $F(x,y) = \dfrac{x^2+y}{1+y^2}$ *in* $\mathbb{R}^2$.

I punti critici sono: $(0,1)$, $(0,-1)$

2 punti (1 punto a chi ha trovato solo $(0,1)$)

---

**Esercizio 6.** *Calcolare la matrice hessiana* $H$ *della funzione* $F(x,y) = \dfrac{x(x+y)}{1+y^3}$ *nel punto* $(0,0)$. *Dire se* $H$ *è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa o indefinita.*

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1 punto

*La matrice* $H$ *è:* indefinita

1 punto

---

**Esercizio 7.** *Calcolare l'area dell'insieme* $\Omega = \Big\{(x,y)\ :\ 0 \le x^3 \le y \le x^2\Big\}$.

"Area di $\Omega$"$= \dfrac{1}{12}$

2 punti

---

**Esercizio 8.** *Dato il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2+1}\,,\ \frac{y-x}{x^2+y^2+1}\right),$$

*calcolare l'integrale della divergenza di* $F$ *sulla palla di raggio 1 e centro* $(0,0)$ *in* $\mathbb{R}^2$.

$$\iint_{B_1} \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy = \pi$$

2 punti

---

**Esercizio 9.** *Per quali valori del parametro* $c \in \mathbb{R}$ *la forma* $\alpha = xy\,dx + \big(cx^2+y^2\big)\,dy$ *è chiusa?*

$c = 1/2$

2 punti

---

## Parte 2

Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

**Esercizio 10.** *Per i valori di c trovati nell'esercizio precedente (Esercizio 9), calcolare l'integrale della forma $\alpha$ sulla curva*

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 , \qquad \gamma(t) = \left(t^2,\ te^{2(t-1)}\right).$$

---

**Esercizio 11.** *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^2 - 4xy + \frac{1}{3}y^3.$$

*Trovare (se esistono!) i punti critici di $F$ in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice Hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.*

---

**Esercizio 12.** *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{\left(x^2+y^2\right)^{1/4} y}{y^2 + \sqrt{1+x^2+y^2}}$$

*calcolare* $\limsup\limits_{|(x,y)|\to\infty} F(x,y)$.

---

**Esercizio 13.** *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{x^2(e^y-1)}{x^2+y^2} \quad se\ (x,y) \neq (0,0).$$

(1) *Dire se $F$ è derivabile in zero e calcolare, se esiste il gradiente $\nabla F(0,0) = (0,0)$.*

(2) *Dire se $F$ è derivabile su $\mathbb{R}^2$ e determinare se le sue derivate parziali $\partial_x F$ e $\partial_y F$ sono funzioni continue su $\mathbb{R}^2$.*

(3) *Dire se $F$ è differenziabile in zero.*

(4) *Dire se $F$ è continua su $\mathbb{R}^2$.*

(5) *Calcolare, al variare del vettore $V = (a,b) \neq (0,0)$, la derivata direzionale*

$$\partial_V F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(tV).$$

---

(10) $\alpha = xy\,dx + \left(\frac{1}{2}x^2 + y^2\right)dy$

$\alpha$ è chiusa su $\mathbb{R}^2$.

Quindi $\alpha$ è esatta, ovvero esiste una funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che

$dF = \alpha$. In particolare, per <u>ogni</u>

<u>curva</u> $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

abbiamo che

$$\int_\sigma \alpha = \int_0^1 \sigma'(t) \cdot \nabla F(\sigma(t))\, dt$$

$$= F(\sigma(1)) - F(\sigma(0)).$$

Quindi, l'integrale di $\alpha$ su $\sigma$ dipende solo da $\sigma(1)$ e $\sigma(0)$!

La curva

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t^2, te^{2(t-1)})$$

è tale che $\begin{cases} \gamma(0) = (0,0) \\ \gamma(1) = (1,1) \end{cases}$.

Consideriamo la curva con gli stessi estremi: $\sigma(t) = (t,t)$, $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$$\int_\sigma \alpha = \int_0^1 \sigma'(t) \cdot \alpha(\sigma(t))\, dt$$

$$= \int_0^1 (1,1)\cdot\left(t^2, \frac{3}{2}t^2\right) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{5}{2} t^2 \, dt = \frac{5}{6}.$$

---

11

funzione

$$F(x, y) = x^2 - 4xy + \frac{1}{3}y^3.$$

$$\begin{cases} \partial_x F = 2x - 4y \\ \partial_y F = -4x + y^2 \end{cases}$$

$(x,y)$ è un punto critico

$\iff DF(x,y) = 0$

$\iff \begin{cases} \partial_x F(x,y) = 0 \\ \partial_y F(x,y) = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y^2 - 4x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ y^2 - 8y = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = 16 \\ y = 8 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

I punti critici sono $\begin{pmatrix}16\\8\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

La matrice hessiana $D^2F$ di $F$ è:

$$\partial_{xx}F = 2$$
$$\partial_{yy}F = 2y \qquad D^2F(x,y) = \begin{pmatrix}2 & -4\\ -4 & 2y\end{pmatrix}$$
$$\partial_{xy}F = -4$$

- In $(0,0)$: $D^2F(0,0) = \begin{pmatrix}2 & -4\\ -4 & 0\end{pmatrix}$

  $\det\left(D^2F(0,0)\right) = -16 < 0$

  $\Rightarrow D^2F(0,0)$ è indefinita

  $\Rightarrow (0,0)$ è un punto di sella.

- In $(16,8)$: $D^2F(16,8) = \begin{pmatrix}2 & -4\\ -4 & 16\end{pmatrix}$

  $\det\left(D^2F(16,8)\right) = 32 - 16 > 0$

  $\mathrm{tr}\left(D^2F(16,8)\right) = 32 > 0$

  $\Rightarrow D^2F(16,8)$ è definita positiva

$\Rightarrow (16,8)$ è un punto di minimo relativo

---

12 In coordinate polari: $F(x,y) = \dfrac{(x^2+y^2)^{1/4}y}{y^2+\sqrt{1+x^2+y^2}}$

$$F(R\cos\theta, R\sin\theta) = \frac{R^{1/2}(R\sin\theta)}{R^2\sin^2\theta + \sqrt{1+R^2}}$$

Fissiamo $R>0$ e cerchiamo i punti critici della funzione

$$\theta \longmapsto F(R\cos\theta, R\sin\theta).$$

$$\partial_\theta\left[F(R\cos\theta, R\sin\theta)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{R^{3/2}}\cos\theta\left(\sqrt{1+R^2} + R^2\sin^2\theta\right) - \cancel{R^{3/2}}\sin\theta \cdot R^2 \cdot 2\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta\left(\sqrt{1+R^2} - R^2\sin^2\theta\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = 0 \quad \left(\text{in questo caso } F = \frac{R^{3/2}}{R^2+\sqrt{1+R^2}}\right) \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

oppure

$$\sin^2\theta = \frac{\sqrt{1+R^2}}{R^2}$$

In questo caso:

$$F = \frac{R^{3/2}\sin\theta}{R^2\sin^2\theta + \sqrt{1+R^2}}$$

$$= \frac{R^{3/2}\cdot\frac{(1+R^2)^{1/4}}{R}}{2\sqrt{1+R^2}}$$

$$= \frac{R^{1/2}}{2(1+R^2)^{1/4}} \xrightarrow[R\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \limsup_{|(x,y)|\to+\infty} F(x,y) = \frac{1}{2}.$$

---

(13)
$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(e^y-1)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0); \\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

(1) $F$ è derivabile in zero. Infatti, esistono le derivate parziali

$$\begin{cases} \partial_x F(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\overset{=0}{F(x,0)} - \overset{=0}{F(0,0)}}{x} = 0 \\ \partial_y F(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\overset{=0}{F(0,y)} - \overset{=0}{F(0,0)}}{y} = 0. \end{cases}$$

---

(4) $F$ è continua in zero. Infatti,

$$|F(x,y)| = \frac{x^2}{x^2+y^2}|e^y - 1| \leq |e^y - 1| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 .$$

---

(5) Per ogni $(a,b) \neq (0,0)$ calcoliamo

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(ta,tb) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left[ \frac{(ta)^2 (e^{tb} - 1)}{t^2a^2 + t^2b^2} \right]$$

$$= \frac{a^2}{a^2+b^2} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (e^{tb} - 1)$$

$$= \frac{ba^2}{a^2+b^2} .$$

(3) $F$ non è differenziabile in $(0,0)$.

Infatti, se $F$ fosse differenziabile in $(0,0)$ sarebbe vera la formula

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(ta,tb) = (a,b)\cdot \underbrace{DF(0,0)}_{(0,0)} = 0.$$

Ma se per esempio $a=b=1$, per il calcolo del punto (5),

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left[F(ta,tb)\right] = \frac{a^2 b}{a^2+b^2} = \frac{1}{2} \neq 0. \quad \lightning$$

Di conseguenza, $F$ non è differenziabile in $(0,0)$.

(2) Le derivate parziali di $F$ sono definite in ogni punto di $\mathbb{R}^2$, ma le funzioni:

$$\begin{cases} \partial_x F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ \partial_y F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \end{cases}$$

non sono continue. Infatti, se

$\partial_x F$ e $\partial_y F$ fossero funzioni continue in $(0,0)$, allora per il teorema del differenziale totale $F$ sarebbe differenziabile in zero.

---

10

- chiusa $\Rightarrow$ esatta 1
- esatta $\Rightarrow$ l'integrale non dipende dalla curva, ma solo dagli estremi 1
- scelta della curva $\sigma$. 1
- calcolo di $\int_\sigma \alpha$ 1

---

11

- Punti critici: 1 punto $(0,0)$ 1

  1 punto $(16,8)$ 1
- studio matrice hessiana in $(0,0)$

  + carattere di $(0,0)$ 2
- studio della matrice hessiana in $(16,8)$

  + carattere di $(16,8)$. 2

(12) Funzione in coordinate polari : 1 punto

Punti critici in $\Theta$ : 1 punto.

Calcolo della funzione nel primo punto critico 1 punto

Calcolo della funzione nel secondo punto critico 2 punti

---

(13) 1 punto a domanda

---

| | |
|---|---|
| 10 : | 4 punti |
| 11 : | 6 punti |
| 12 : | 5 punti |
| 13 : | 5 punti |