Prova scritta – 15 Febbraio 2022

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Con* B_R *indichiamo la palla di raggio* $R > 0$ *e centro* $(0,0)$ *in* $\mathbb{R}^2$

$$B_R = \Big\{(x,y) \;:\; x^2 + y^2 < R^2\Big\}.$$

Consideriamo gli insiemi

(A) $\Omega_A = \partial B_1 \cup \{(0,0)\}$; (B) $\Omega_B = B_1 \cap \{(0,0)\}$;

(C) $\Omega_C = \overline{B}_1 \cup \{(0,0)\}$; (D) $\Omega_D = \overline{B}_1 \setminus \{(0,0)\}$;

(E) $\Omega_E = \overline{B}_2 \setminus B_1$; (F) $\Omega_F = B_2 \setminus \overline{B}_1$.

Gli insiemi seguenti sono **compatti** *:* A, B, C, E

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big([0,1] \times [0,1]\Big) \cap \Big\{(x,y) \;:\; y \geq x\Big\} \setminus \{(0,0)\}$$

$$\partial D = \{(t,t) : 0 \leq t \leq 1\} \cup \{(0,y) : 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x,1) : 0 \leq x \leq 1\}$$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione* $\dfrac{\cos(y+x^2)}{1-\sin(x-y)}$.

$$\frac{\cos(y+x^2)}{1-\sin(x-y)} = \frac{1 - \frac{y^2}{2} + o(x^2+y^2)}{1-(x-y)+o(x^2+y^2)} = \left(1-\frac{y^2}{2}\right)\left(1+(x-y)+(x-y)^2\right) + o(x^2+y^2)$$
$$= 1 + x - y + x^2 + \frac{y^2}{2} - 2xy + o(x^2+y^2)$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big(\sqrt{1+2t} - 1\,,\ \sqrt{1-3t} - 1\Big)$ *e* $F(x,y) = \dfrac{e^{x+2y^2} - e^{y+x^2}}{1+2xy}$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) = \gamma'(0) \cdot \nabla F(\gamma(0)) = \left(1, -\frac{3}{2}\right) \cdot (1,-1) = \frac{5}{2}$$

Esercizio 5. *Calcolare la matrice hessiana H della funzione* $F(x,y) = \dfrac{e^{x^2} + e^{2y^2}}{1+2xy}$ *in* $(0,0)$*. Dire se H è definita positiva, semidefinita positiva, definita negativa, semidefinita negativa, indefinita.*

$H = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ *La matrice H è:* indefinita

Esercizio 6. *Calcolare l'integrale della funzione* $F(x,y) = e^{1-x^2-y^2}$ *sulla palla* B_1.

$\displaystyle\iint_{B_1} F(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{1-R^2} R\,dR\,d\theta = \pi(e-1)$

Esercizio 7. *Siano* $\alpha = (x^2 - xy + y^2)\,dx + x\,dy$ *e γ la curva semplice chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo del quadrato* $[0,1]\times[0,1]$ *in senso antiorario.* *Calcolare* $\displaystyle\int_\gamma \alpha = 1/2$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 y + y^2.$$

Trovare (se esistono!) i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice Hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. *Trovare i massimi ed i minimi della funzione*

$$F(x,y,z) = x - y + z\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + z^2 \le 5\Big\}.$$

Esercizio 10. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}\Big(x^2+y^2+\frac{y^2}{x^2+y^2}\Big)}\ .$$

Calcolare $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$ *e* $\displaystyle\liminf_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$ *e dire se esiste il limite* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{xy^2}{\big(x^2+y^2\big)^n} \quad se\ (x,y) \neq (0,0),$$

dove $n \ge 1$ è un numero intero.

(1) *Per quali valori del parametro $n \ge 1$ la funzione è derivabile in $(0,0)$.*

(2) *Per quali valori del parametro $n \ge 1$ la funzione F è continua in $(0,0)$.*

(3) *Per quali valori del parametro $n \ge 1$ la funzione F è differenziabile in $(0,0)$.*

Soluzione 7: Sia $D = [0,1] \times [0,1]$,

Per la formula di Stokes

$$\int_{\sigma} \alpha = \int_{(\partial D)_+} \alpha = \int_D d\alpha$$

perché σ parametrizza il bordo in senso antiorario

Stokes

Calcoliamo

$$d\alpha = \frac{\partial (x^2 - xy + y^2)}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial x}{\partial x} dx \wedge dy$$

$$= (-x + 2y)\, dy \wedge dx + dx \wedge dy$$

$$= (x - 2y + 1)\, dx \wedge dy$$

$$\int_D d\alpha = \int_D (x - 2y + 1)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^1 (x - 2y + 1)\, dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2} - 2y\right) dy = \frac{1}{2}.$$

(8) I punti critici sono $(0,0)$ e $(4,4)$;

- In $(4,4)$ la matrice hessiana è <u>indefinita</u>. Quindi $(4,4)$ è un <u>punto di sella</u>.
- In $(0,0)$ la matrice hessiana è <u>semidefinita positiva</u>. Quindi, l'analisi al secondo ordine non permette di stabilire il carattere del punto critico.

(In realtà $(0,0)$ è un punto di sella.)

(9) Il massimo ed il minimo di F su D sono entrambi realizzati sul bordo ∂D.

Il massimo è realizzato nel punto $(2,-2,1)$:

$$\max_D F = F(2,-2,1) = 5.$$

Il minimo è realizzato nel punto $(-2,2,-1)$:

$$\min_D F = F(-2,2,-1) = -5.$$

(10)
$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \frac{1}{2} ;$$

$$\liminf_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = -\frac{1}{2} ;$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) \text{ non esiste.}$$

(11)

1) F è derivabile per ogni $n \geq 1$;

2) F è continua $\Leftrightarrow$ $n = 1$

3) F non è mai differenziabile per $n \geq 1$.