Prova scritta – 25 Gennaio 2022

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Con* B_R *indichiamo la palla di raggio* $R > 0$ *e centro* $(0,0)$ *in* $\mathbb{R}^2$

$$B_R = \Big\{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 < R^2\Big\}.$$

Consideriamo gli insiemi

(A) $\Omega_A = \Big\{[0,2] \times [0,2]\Big\} \cap \partial B_1$; (B) $\Omega_B = \Big\{[0,2] \times [0,2]\Big\} \setminus \partial B_1$;

(C) $\Omega_C = \Big\{[0,2] \times [0,2]\Big\} \cup \partial B_1$; (D) $\Omega_D = \partial B_1 \setminus \Big\{[0,2] \times [0,2]\Big\}$;

(E) $\Omega_E = \Big\{(0,2] \times (0,2]\Big\} \cup \partial B_1$; (F) $\Omega_F = \partial B_1 \cap \Big\{(0,2] \times (0,2]\Big\}$.

Gli insiemi seguenti sono **chiusi** *:*

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = B_1 \cup \Big\{(0,y) \ : \ y \geq 0\Big\} \setminus \Big\{(x,0) \ : \ -2 \leq x \leq 2\Big\}$$

$\partial D =$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione* $\dfrac{e^{x+2y}}{1+xy}$.

$$\frac{e^{x+2y}}{1+xy} =$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big(\sin(3t)e^{2t}, \ e^{4t} - \cos(2t)\Big)$ *e* $F(x,y) = (1+x)^2 + (1-y)^3.$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) =$$

Esercizio 5. *Calcolare la matrice hessiana H della funzione* $F(x,y) = \dfrac{(x+y)\sin(2x+y)}{\cos(x-y)}$ *in* $(0,0)$. *Dire se H è definita positiva, semidefinita positiva, definita negativa, semidefinita negativa, indefinita.*

$H =$ *La matrice H è:*

Esercizio 6. *Calcolare l'integrale della funzione* $F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$ *sulla palla* B_1.

$\iint_{B_1} F(x,y)\,dx\,dy =$

Esercizio 7. *Consideriamo la forma* $\alpha = (x^5 - y^3)\,dx + x^3\,dy$ *e la curva* $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(\cos t,\, \sin t\big)$. *Calcolare* $\int_\gamma \alpha =$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^3 + 3xy - y^3.$$

Trovare (se esistono!) i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice Hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. *Trovare i massimi ed i minimi della funzione*

$$F(x,y,z) = x + 2y - 2z\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\Big\}.$$

Esercizio 10. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \frac{xy\sqrt{x^2+y^2}}{y^2 + \big(x^2+y^2\big)^2}\ .$$

Calcolare $\limsup\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$ *e* $\liminf\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$ *e dire se esiste il limite* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{xy^n}{x^2+y^2} \quad se\ (x,y) \neq (0,0),$$

dove $n \geq 1$ è un numero intero.

(1) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione è derivabile in* $(0,0)$.

(2) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione F è continua in* $(0,0)$.

(3) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione F è differenziabile in* $(0,0)$.
