Sviluppi di Taylor al primo e secondo ordine

Definizione

Definizione 1. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili. Diciamo che F ammette uno sviluppo di Taylor al primo ordine in $(0,0)$, se esistono costanti*

$$c \in \mathbb{R} \ ; \quad a, b \in \mathbb{R} \ ,$$

tali che

$$F(x,y) = c + ax + by + o(|(x,y)|).$$

Definizione 2. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili. Diciamo che F ammette uno sviluppo di Taylor al secondo ordine in $(0,0)$, se esistono costanti*

$$c \in \mathbb{R} \ ; \quad a, b \in \mathbb{R} \ ; \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \ ,$$

tali che

$$F(x,y) = c + ax + by + \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + o(|(x,y)|^2).$$

Unicità dello sviluppo di Taylor

Proposizione 3. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili. Supponiamo che esistono delle costanti*

$$c_1 \in \mathbb{R} \ ; \quad a_1, b_1 \in \mathbb{R} \ ,$$

$$c_2 \in \mathbb{R} \ ; \quad a_2, b_2 \in \mathbb{R} \ ,$$

tali che

$$F(x,y) = c_1 + a_1 x + b_1 y + o(|(x,y)|),$$
$$F(x,y) = c_2 + a_2 x + b_2 y + o(|(x,y)|).$$

Allora:

$$c_1 = c_2 \ , \quad a_1 = a_2 \ , \quad b_1 = b_2 \, .$$

Proposizione 4. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili. Supponiamo che esistono delle costanti*

$$c_1 \in \mathbb{R} \ ; \quad a_1, b_1 \in \mathbb{R} \ ; \quad \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in \mathbb{R} \ ,$$

$$c_2 \in \mathbb{R} \ ; \quad a_2, b_2 \in \mathbb{R} \ ; \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in \mathbb{R} \ ,$$

tali che

$$F(x,y) = c_1 + a_1 x + b_1 y + \alpha_1 x^2 + \beta_1 y^2 + \gamma_1 xy + o(|(x,y)|^2),$$
$$F(x,y) = c_2 + a_2 x + b_2 y + \alpha_2 x^2 + \beta_2 y^2 + \gamma_2 xy + o(|(x,y)|^2).$$

Allora:

$$c_1 = c_2 \, ,$$

$$a_1 = a_2 \ , \quad b_1 = b_2 \, ,$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 \ , \quad \beta_1 = \beta_2 \ , \quad \gamma_1 = \gamma_2 \, .$$

Dimostrazione.

- Dimostriamo che $c_1 = c_2$. Abbiamo che

$$F(x,y) = c_1 + a_1x + b_1y + \alpha_1x^2 + \beta_1y^2 + \gamma_1xy + o(|(x,y)|^2),$$
$$F(x,y) = c_2 + a_2x + b_2y + \alpha_2x^2 + \beta_2y^2 + \gamma_2xy + o(|(x,y)|^2).$$

  Siccome,

$$x = o(1),\ y = o(1),\ x^2 = o(1),\ y^2 = o(1),\ xy = o(1),\ o(r^2) = o(r) = o(1),$$

  otteniamo che

$$F(x,y) = c_1 + o(1),$$
$$F(x,y) = c_2 + o(1).$$

  Facendo la differenza, otteniamo che

$$c_2 - c_1 = o(1).$$

  Quindi necessariamente $c_2 = c_1$.

- Dimostriamo che $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$. Abbiamo che

$$c_1 = c_2$$
$$F(x,y) = c_1 + a_1x + b_1y + \alpha_1x^2 + \beta_1y^2 + \gamma_1xy + o(|(x,y)|^2),$$
$$F(x,y) = c_2 + a_2x + b_2y + \alpha_2x^2 + \beta_2y^2 + \gamma_2xy + o(|(x,y)|^2).$$

  Siccome,

$$x^2 = o(r),\ y^2 = o(r),\ xy = o(r),\ o(r^2) = o(r),$$

  otteniamo che

$$F(x,y) = c_1 + a_1x + b_1y + o(1),$$
$$F(x,y) = c_1 + a_2x + b_2y + o(1).$$

  Quindi,

$$(a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y = o(r),$$

  ovvero

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

  In particolare,

$$\begin{aligned} 0 &= \limsup_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{r\to 0}\left\{\sup_\theta \Big((a_2 - a_1)\cos\theta + (b_2 - b_1)\sin\theta\Big)\right\} \\ &= \sup_\theta \Big((a_2 - a_1)\cos\theta + (b_2 - b_1)\sin\theta\Big). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \liminf_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{r\to 0}\left\{\inf_\theta \Big((a_2 - a_1)\cos\theta + (b_2 - b_1)\sin\theta\Big)\right\} \\ &= \inf_\theta \Big((a_2 - a_1)\cos\theta + (b_2 - b_1)\sin\theta\Big). \end{aligned}$$

  Di conseguenza,

$$(a_2 - a_1)\cos\theta + (b_2 - b_1)\sin\theta \quad \text{per ogni} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

  Prendendo $\theta = 0$, otteniamo

$$a_2 = a_1.$$

  Se prendiamo invece $\theta = \frac{\pi}{2}$, otteniamo

$$b_2 = b_1.$$

- Infine, dimostriamo che $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ e $\gamma_1 = \gamma_2$. Abbiamo che

$$F(x,y) = c_1 + a_1 x + b_1 y + \alpha_1 x^2 + \beta_1 y^2 + \gamma_1 xy + o(|(x,y)|^2),$$
$$F(x,y) = c_1 + a_1 x + b_1 y + \alpha_2 x^2 + \beta_2 y^2 + \gamma_2 xy + o(|(x,y)|^2).$$

Quindi, facendo la differenza, otteniamo che

$$(\alpha_2 - \alpha_1)x^2 + (\beta_2 - \beta_1)y^2 + (\gamma_2 - \gamma_1)xy = o(r^2),$$

ovvero

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)x^2 + (\beta_2 - \beta_1)y^2 + (\gamma_2 - \gamma_1)xy}{x^2+y^2} = 0\,.$$

In particolare,

$$\begin{aligned}
0 &= \limsup_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)x^2 + (\beta_2 - \beta_1)y^2 + (\gamma_2 - \gamma_1)xy}{x^2+y^2} \\
&= \lim_{r\to 0}\left\{ \sup_\theta \Big((\alpha_2-\alpha_1)\cos^2\theta + (\beta_2-\beta_1)\sin^2\theta + (\gamma_2-\gamma_1)\cos\theta\sin\theta\Big)\right\} \\
&= \sup_\theta \Big((\alpha_2-\alpha_1)\cos^2\theta + (\beta_2-\beta_1)\sin^2\theta + (\gamma_2-\gamma_1)\cos\theta\sin\theta\Big).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \liminf_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)x^2 + (\beta_2 - \beta_1)y^2 + (\gamma_2 - \gamma_1)xy}{x^2+y^2} \\
&= \lim_{r\to 0}\left\{ \inf_\theta \Big((\alpha_2-\alpha_1)\cos^2\theta + (\beta_2-\beta_1)\sin^2\theta + (\gamma_2-\gamma_1)\cos\theta\sin\theta\Big)\right\} \\
&= \inf_\theta \Big((\alpha_2-\alpha_1)\cos^2\theta + (\beta_2-\beta_1)\sin^2\theta + (\gamma_2-\gamma_1)\cos\theta\sin\theta\Big).
\end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$(\alpha_2-\alpha_1)\cos^2\theta + (\beta_2-\beta_1)\sin^2\theta + (\gamma_2-\gamma_1)\cos\theta\sin\theta \quad \text{per ogni} \quad \theta\in[0,2\pi].$$

Prendendo $\theta = 0$, otteniamo

$$\alpha_2 = \alpha_1.$$

Se prendiamo invece $\theta = \frac{\pi}{2}$, otteniamo

$$\beta_2 = \beta_1.$$

Infine, prendendo $\theta = \frac{\pi}{4}$, otteniamo

$$\gamma_2 = \gamma_1.$$

□

Esempio

Sia $F(x,y) = e^{x+xy}$. Siccome,

$$x + xy = O(r) + O(r^2) = O(r),$$

e

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2),$$

otteniamo che

$$\begin{aligned}
e^{x+xy} &= 1 + (x+xy) + \frac{1}{2}(x+xy)^2 + o(r^2) \\
&= 1 + x + xy + \frac{1}{2}x^2 + x^2y + \frac{1}{2}x^2y^2 + o(r^2) \\
&= 1 + x + xy + \frac{1}{2}x^2 + o(r^2) + o(r^2) + o(r^2) \\
&= 1 + x + xy + \frac{1}{2}x^2 + o(r^2).
\end{aligned}$$