

## o-piccolo e O-grande, in coordinate cartesiane e coordinate polari

### DEFINIZIONE

**Definizione 1.** Sia  $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di due variabili.

- **o-piccolo.** Dato  $k \geq 0$ , diremo che

$$F(x, y) = o\left(|(x, y)|^k\right) = o\left((\sqrt{x^2 + y^2})^k\right),$$

se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{F(x, y)}{(\sqrt{x^2 + y^2})^k} = 0,$$

ovvero se

$$\text{Per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } \delta > 0 \text{ tale che: } 0 < |(x, y)| < \delta \Rightarrow \frac{|F(x, y)|}{(\sqrt{x^2 + y^2})^k} < \varepsilon.$$

- **O-grande.** Dato  $k \geq 0$ , diremo che

$$F(x, y) = O\left(|(x, y)|^k\right) = O\left((\sqrt{x^2 + y^2})^k\right),$$

se

$$\text{Esistono } C > 0 \text{ e } \delta > 0 \text{ tale che: } 0 < |(x, y)| < \delta \Rightarrow \frac{|F(x, y)|}{(\sqrt{x^2 + y^2})^k} < C.$$

### PASSAGGIO DA o-PICCOLO A O-GRANDE E VICEVERSA

Un'osservazione utile in generale (che però non sarà necessaria per la definizione di o-piccolo e O-grande in coordinate polari) è la seguente.

**Osservazione 2.** Sia  $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di due variabili. Sia  $k \geq 0$ .

- **o-piccolo  $\Rightarrow$  O-grande.** Se

$$k \geq 0 \quad e \quad F(x, y) = o\left(|(x, y)|^k\right),$$

allora

$$F(x, y) = O\left(|(x, y)|^k\right).$$

- **O-grande  $\Rightarrow$  o-piccolo.** Se

$$k \geq 1 \quad e \quad F(x, y) = O\left(|(x, y)|^k\right),$$

allora

$$F(x, y) = o\left(|(x, y)|^{k-1}\right).$$

Sia  $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di due variabili. Sia  $k \geq 0$ . Allora,

$$(i) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{F(x,y)}{(\sqrt{x^2 + y^2})^k} = 0 ;$$

è equivalente a

(ii) Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che:

$$0 < |(x, y)| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{|F(x, y)|}{(\sqrt{x^2 + y^2})^k} < \varepsilon.$$

Siccome ogni punto  $(x, y) \neq (0, 0)$  si può scrivere come

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad \text{per } r > 0, \theta \in [0, 2\pi],$$

abbiamo che (ii) è equivalente a:

(iii) Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che:

$$0 < r < \delta \quad \text{e} \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad \Rightarrow \quad \frac{|F(r \cos \theta, r \sin \theta)|}{r^k} < \varepsilon.$$

Ora, osserviamo che l'affermazione (iii) è equivalente a

(iv) Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che:

$$0 < r < \delta \quad \Rightarrow \quad \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \frac{|F(r \cos \theta, r \sin \theta)|}{r^k} < \varepsilon.$$

Infine, per la definizione di limite, (iv) è equivalente a

$$(v) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \frac{|F(r \cos \theta, r \sin \theta)|}{r^k} \right\} = 0.$$

Abbiamo quindi dimostrato la proposizione seguente:

**Proposizione 3.** *Sia  $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di due variabili. Sia  $k \geq 0$ . Allora, sono equivalenti:*

$$(1) \quad F(x, y) = o(|(x, y)|^k).$$

$$(2) \quad \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |F(r \cos \theta, r \sin \theta)| = o(r^k).$$

Per alleggerire la notazione, introduciamo la seguente convenzione.

**Definizione 4.** *Sia  $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di due variabili. Sia  $k \geq 0$ .*

$$\text{Diremo che} \quad F(r \cos \theta, r \sin \theta) = o(r^k), \quad \text{se} \quad \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |F(r \cos \theta, r \sin \theta)| = o(r^k).$$

---

## O-GRANDE IN COORDINATE POLARI

Sia  $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di due variabili. Siano  $k \geq 0$  un numero intero e  $C > 0$  una costante positiva. Allora, l'affermazione

(i) Esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\frac{|F(x, y)|}{(\sqrt{x^2 + y^2})^k} < C \quad \text{per ogni } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta ;$$

è equivalente a

(ii) Esiste  $\delta > 0$  tale che:

$$\frac{|F(r \cos \theta, r \sin \theta)|}{r^k} < C \quad \text{per ogni } 0 < r < \delta \quad \text{ed ogni } \theta \in [0, 2\pi] .$$

L'affermazione (ii) è a sua volta equivalente a

(iii) Esiste  $\delta > 0$  tale che:

$$\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \frac{|F(r \cos \theta, r \sin \theta)|}{r^k} < C \quad \text{per ogni } 0 < r < \delta .$$

Abbiamo quindi dimostrato la proposizione seguente:

**Proposizione 5.** *Sia  $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di due variabili. Sia  $k \geq 0$ . Allora, sono equivalenti:*

- (1)  $F(x, y) = O(|(x, y)|^k)$ .
- (2)  $\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |F(r \cos \theta, r \sin \theta)| = O(r^k)$ .

Come per l'*o*-piccolo, introduciamo la seguente convenzione.

**Definizione 6.** *Sia  $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di due variabili. Sia  $k \geq 0$ .*

*Diremo che*  $F(r \cos \theta, r \sin \theta) = O(r^k)$ , *se*  $\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |F(r \cos \theta, r \sin \theta)| = O(r^k)$ .

---

## QUALCHE ESEMPIO

- $y = o(1)$  ;  $x = o(1)$  ;
- $y = O(\sqrt{x^2 + y^2}) = o(r)$  ;  $x = O(\sqrt{x^2 + y^2}) = o(r)$  ;
- $\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = O(1)$  ;
- $\sin y = O(\sqrt{x^2 + y^2}) = O(r)$  ;
- $\cos x - 1 = O(x^2 + y^2) = O(r^2)$  ;
- $e^y = 1 + O(\sqrt{x^2 + y^2}) = 1 + O(r)$  ;
- $\cos y = 1 + o(\sqrt{x^2 + y^2}) = 1 + o(r)$  ;
- $\frac{1}{1 + xy} = 1 + O(x^2 + y^2) = 1 + O(r^2) = 1 + o(r)$  .