Liminf e limsup

Definizioni

Definizione 1. *Siano Ω un insieme in $\mathbb{R}^d$ e $X_0 \in \Omega$ un punto di Ω. Sia $F : \Omega \setminus \{X_0\} \to \mathbb{R}$ una funzione a valori reali.*

- *Definiamo* $\limsup\limits_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X)$ *come*

$$\sup\Big\{\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \ :\ \textit{esiste una successione}\ \ X_n \to X_0,\ X_n \in \Omega,\ \ \textit{tale che}\ \ \lim_{n\to\infty} F(X_n) = \ell\Big\}.$$

- *Definiamo* $\liminf\limits_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X)$ *come*

$$\inf\Big\{\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \ :\ \textit{esiste una successione}\ \ X_n \to X_0,\ X_n \in \Omega,\ \ \textit{tale che}\ \ \lim_{n\to\infty} F(X_n) = \ell\Big\}.$$

Inoltre, se X_0 è un punto della parte interna di Ω, allora scriveremo semplicemente

$$\limsup_{X\to X_0} F(X) \qquad e \qquad \liminf_{X\to X_0} F(X).$$

Limiti, limsup e liminf

Teorema 2. *Consideriamo un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ed un punto $X_0 \in \Omega$. Dati una funzione $F : \Omega\setminus\{X_0\} \to \mathbb{R}$ ed un $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, sono equivalenti:*

(1) $\lim\limits_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = L\,;$

(2) $\liminf\limits_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = \limsup\limits_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = L\,.$

Dimostrazione. Definiamo l'insieme $\mathcal{I}$ come

$$\mathcal{I} := \Big\{\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \ :\ \text{esiste una successione}\ \ X_n \to X_0,\ X_n \in \Omega,\ \ \text{tale che}\ \ \lim_{n\to\infty} F(X_n) = \ell\Big\}.$$

Dimostriamo prima che (1) implica (2). Siccome per ipotesi

$$\lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = L\,,$$

abbiamo che per ogni successione

$$X_n \in \Omega \setminus \{X_0\}\ , \quad \lim_{n\to\infty} X_n = X_0\,,$$

si ha che

$$\lim_{n\to\infty} F(X_n) = L\,.$$

Di conseguenza,

$$\mathcal{I} = \{L\}\,,$$

il che implica (2).

Supponiamo ora che (2) sia vero. Allora:

$$\sup \mathcal{I} = \inf \mathcal{I} = L.$$

Di conseguenza,

$$\mathcal{I} = \{L\}.$$

Data una successione

$$X_n \in \Omega \setminus \{X_0\} \ , \quad \lim_{n\to\infty} X_n = X_0 \, ,$$

supponiamo che

$$\lim_{n\to\infty} F(X_n) \neq L \, .$$

Allora, esiste una sottosuccessione

$$X_{n_k} \in \Omega \setminus \{X_0\} \ , \quad \lim_{k\to\infty} X_{n_k} = X_0 \, ,$$

tale che

$$\lim_{n\to\infty} F(X_n) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \qquad \text{e} \qquad \ell \neq L \, .$$

Mavquesto implicherebbe che $\ell \in \mathcal{I}$ il che è impossibile. Quindi $\lim\limits_{n\to\infty} F(X_n) = L$. □

LIMSUP E LIMINF IN COORDINATE POLARI

Proposizione 3. *Siano* $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *una funzione ed* $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*.*
Allora, sono equivalenti:

(i) $\limsup\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = L$ *;*

(ii) $\limsup\limits_{\rho\to 0^+} \Big\{ \sup\limits_{\theta\in[0,2\pi]} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \Big\} = L$ *.*

Dimostrazione. Per ogni $\rho > 0$ definiamo

$$g(\rho) := \sup_{\partial B_\rho} F.$$

Inoltre, siano $A, B \subset \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ gli insiemi

$$A := \Big\{ a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \ : \ \text{esiste una successione} \ \ X_n \to 0, \ X_n \neq 0, \ \ \text{tale che} \ \ \lim_{n\to\infty} F(X_n) = a \Big\}.$$

$$B := \Big\{ b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \ : \ \text{esiste una successione} \ \ \rho_n \to 0, \ \rho_n > 0, \ \ \text{tale che} \ \ \lim_{n\to\infty} g(\rho_n) = b \Big\}.$$

Mostreremo che

$$\sup A = \sup B.$$

Sia $a \in A$. Allora, esiste una successione $X_n \to 0$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} F(X_n) = a.$$

Ora, definendo

$$\rho_n := |X_n|,$$

abbiamo che

$$F(X_n) \leq \sup_{\partial B_{\rho_n}} F = g(\rho_n).$$

Passando al limite per $n \to \infty$, otteniamo

$$a = \lim_{n\to+\infty} F(X_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} g(\rho_n) \leq \limsup_{\rho\to+\infty} g(\rho) = \sup B. \tag{1}$$

Siccome questa disugaglianza è vera per ogni elemento $a \in A$, otteniamo che

$$\sup A \leq \sup B.$$

Sia ora $b \in B$. Allora, esiste una successione di raggi $\rho_k > 0$ tale che

$$\lim_{k\to+\infty} \rho_k = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{k\to+\infty} g(\rho_k) = b.$$

Per la definizione di

$$\sup_{X\in\partial B_{\rho_k}} F(X),$$

su ogni sfera ∂B_{ρ_k} possiamo trovare un punto X_k tale che

$$X_k \in \partial B_{\rho_k} \qquad \text{e} \qquad \big|F(X_k) - g(\rho_k)\big| \leq \frac{1}{k}.$$

Abbiamo quindi costruito una successione $X_k \in \Omega$ tale che

$$|X_k| = \rho_k \to 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{k\to+\infty} F(X_k) = b.$$

Per la definizione di

$$\limsup_{X\to 0} F(X)$$

si ha che

$$b \leq \limsup_{X\to 0} F(X) = \sup A.$$

Siccome questa disuguaglianza vale per ogni $b \in B$, otteniamo che

$$\sup B \leq \sup A,$$

il che conclude la dimostrazione. □

Proposizione 4. *Siano $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ una funzione ed $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Allora, sono equivalenti:*

(i) $\displaystyle\liminf_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*;*

(ii) $\displaystyle\liminf_{\rho\to 0^+} \Big\{ \inf_{\theta\in[0,2\pi]} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \Big\} = L.$

Un esempio di calcolo di limsup e liminf

Esempio 5. *Studiare il comportamento (esistenza di limite, limsup e liminf), per $(x,y) \to (0,0)$, della funzione seguente:*

$$F(x,y) := \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2(1+y^2)}}.$$

Soluzione. In coordinate polari abbiamo

$$F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{\rho\sin\theta}{\rho(1+\rho^2\sin^2\theta)} = \frac{\sin\theta}{1+\rho^2\sin^2\theta}.$$

Fissiamo $\rho > 0$ e studiamo la funzione

$$f_\rho : [0,2\pi] \to \mathbb{R}\ , \qquad f_\rho(\theta) := \frac{\sin\theta}{1+\rho^2\sin^2\theta}.$$

Per trovare il massimo e il minimo di f_ρ su $[0,2\pi]$, calcoliamo la derivata

$$f_\rho'(\theta) = \frac{\cos\theta\,(1-\rho^2\sin^2\theta)}{(1+\rho^2\sin^2\theta)^2}.$$

Quindi, abbiamo le seguenti possibilità per i punti di massimo e di minimo, θ_M e θ_m, di f_ρ:

(1) θ_M (rispettivamente θ_m) è uno degli estremi dell'intervallo $[0,2\pi]$;

(2) $\cos(\theta_M)=0$ (rispettivamente $\cos(\theta_m)=0$);

(3) $\sin(\theta_M)=\pm\frac{1}{\rho}$ (rispettivamente $\sin(\theta_m)=\pm\frac{1}{\rho}$).

Nel caso (1), abbiamo che

$$f_\rho(0)=f_\rho(2\pi)=0.$$

Nel caso (2), osserviamo che:

$$\text{se}\quad \cos\theta=0\quad \text{allora necessariamente}\quad \sin(\theta)=1\quad \text{oppure}\quad \sin(\theta)=-1$$

e quindi

$$f_\rho(\theta)=\frac{1}{1+\rho^2}\qquad \text{oppure}\qquad f_\rho(\theta)=-\frac{1}{1+\rho^2}.$$

Il caso (3) invece non può verificarsi se $\rho>1$.

Mettendo insieme i tre casi, abbiamo:

$$\max_{\theta\in[0,2\pi]} f_\rho=\frac{1}{1+\rho^2}\qquad \text{e}\qquad \min_{\theta\in[0,2\pi]} f_\rho=-\frac{1}{1+\rho^2}.$$

Di conseguenza,

$$\liminf_{X\to 0} F(X)=\liminf_{\rho\to 0}\Big\{\min_{[0,2\pi]} f_\rho\Big\}=\lim_{\rho\to 0}\Big(-\frac{1}{1+\rho^2}\Big)=-1,$$

$$\limsup_{X\to 0} F(X)=\limsup_{\rho\to 0}\Big\{\max_{[0,2\pi]} f_\rho\Big\}=\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{1+\rho^2}=1\,.$$

Il limite $\lim\limits_{X\to 0} F(X)$ invece non esiste. □

Un teorema utile per il calcolo di limsup e liminf

Teorema 6. *Consideriamo un insieme $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ ed un punto $X_0\in\Omega$. Consideriamo due funzioni*

$$F:\Omega\setminus\{X_0\}\to\mathbb{R}\qquad e\qquad G:\Omega\setminus\{X_0\}\to\mathbb{R},$$

tali che

$$\lim_{\substack{X\,\to\,X_0\\ X\,\in\,\Omega}}\Big(F(X)-G(X)\Big)=0\,.$$

Allora,

$$\limsup_{\substack{X\,\to\,X_0\\ X\,\in\,\Omega}} F(X)=\limsup_{\substack{X\,\to\,X_0\\ X\,\in\,\Omega}} G(X)\qquad e\qquad \liminf_{\substack{X\,\to\,X_0\\ X\,\in\,\Omega}} F(X)=\liminf_{\substack{X\,\to\,X_0\\ X\,\in\,\Omega}} G(X)\,.$$

Dimostrazione. Per ipotesi, per ogni successione

$$X_n\in\Omega\ ,\quad \lim_{n\to\infty} X_n=X_0\ ,$$

si ha che

$$\lim_{n\to\infty}\Big(F(X_n)-G(X_n)\Big)=0\,.$$

Quindi, i seguenti due insiemi coincidono

$$A:=\sup\Big\{\ell\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}\ :\ \text{esiste una successione}\ \ X_n\to X_0,\ X_n\in\Omega,\ \ \text{tale che}\ \ \lim_{n\to\infty} F(X_n)=\ell\Big\}\,;$$

$$B:=\sup\Big\{\ell\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}\ :\ \text{esiste una successione}\ \ X_n\to X_0,\ X_n\in\Omega,\ \ \text{tale che}\ \ \lim_{n\to\infty} G(X_n)=\ell\Big\}\,.$$

Di conseguenza,

$$\sup A = \sup B \qquad \text{e} \qquad \inf A = \inf B,$$

ovvero

$$\limsup_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = \limsup_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) \qquad \text{e} \qquad \liminf_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = \liminf_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X)\,.$$

$\square$

Esempio 7. *Calcolare limsup e liminf, per* $(x, y) \to (0, 0)$*, della funzione*

$$F(x, y) := \frac{\sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ .$$

Soluzione. Definiamo la funzione

$$G(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Di conseguenza,,

$$F(x, y) - G(x, y) = \frac{\sin y - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,.$$

Ora, ricordiamo che siccome

$$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + o(y^3),$$

abbiamo che esistono costanti $R > 0$ e $C > 0$ tali che

$$|\sin y - y| \le C|y|^3 \quad \text{per ogni} \quad y \in (-R, R).$$

Siccome $|y| \le \sqrt{x^2 + y^2}$, abbiamo che

$$|\sin y - y| \le C|y|^3 \le C\big(\sqrt{x^2 + y^2}\,\big)^3 \quad \text{per ogni} \quad (x, y) \in B_R.$$

Quindi, per ogni $(x, y) \in B_R$,

$$\big|F(x, y) - G(x, y)\big| \le \frac{|\sin y - y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \le \frac{C\big(\sqrt{x^2 + y^2}\,\big)^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} \le C\big(x^2 + y^2\big),$$

il che implica

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \Big(F(x, y) - G(x, y)\Big) = 0.$$

Applicando il teorema precedente, otteniamo

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x, y) = \limsup_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{e} \qquad \liminf_{(x,y)\to(0,0)} F(x, y) = \liminf_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ .$$

Ora, osserviamo che in coordinate polari

$$G\big(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta\big) = \sin\theta.$$

Di conseguenza

$$\limsup_{\rho\to 0} \Big\{ \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \frac{\sin\big(\rho\sin\theta\big)}{\rho} \Big\} = \limsup_{\rho\to 0} \Big\{ \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \sin\theta \Big\} = 1,$$

$$\liminf_{\rho\to 0} \Big\{ \inf_{\theta\in[0,2\pi]} \frac{\sin\big(\rho\sin\theta\big)}{\rho} \Big\} = \liminf_{\rho\to 0} \Big\{ \inf_{\theta\in[0,2\pi]} \sin\theta \Big\} = -1.$$

$\square$

Ecco un secondo esempio di calcolo di lim sup e lim inf. Osserviamo che siccome

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{xy^2}{x^2+y^4} \leq \frac{1}{2} \qquad \text{per ogni} \qquad (x,y) \neq (0,0),$$

con uguaglianze raggiunte quando $x = y^2$ e $x = -y^2$, si ha che

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \liminf_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = -\frac{1}{2}\,.$$

Esempio 8. *Calcolare il limsup ed il liminf, per* $(x,y) \to (0,0)$, *della funzione*

$$F(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^4}\ .$$

Dimostrazione. In coordinate polari abbiamo

$$F\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big) = \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^4\sin^4\theta} = \frac{r\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta}\,.$$

Quindi

$$\partial_\theta\Big[F\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big)\Big] = 0$$

se e solo se

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\theta\Big[r\cos\theta\sin^2\theta\Big]\Big(\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta\Big) - r\cos\theta\sin^2\theta\,\partial_\theta\Big[\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta\Big] \\
&= \Big(2r\sin\theta\cos^2\theta - r\sin^3\theta\Big)\Big(\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta\Big) - r\cos\theta\sin^2\theta\,\Big(-2\sin\theta\cos\theta + 4r^2\sin^3\theta\cos\theta\Big) \\
&= r\sin\theta\Big(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\Big)\Big(\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta\Big) + r\sin\theta\,\Big(2\sin^2\theta\cos^2\theta - 4r^2\sin^4\theta\cos^2\theta\Big) \\
&= r\sin\theta\Big[\cos^2\theta\Big(2 - \sin^2\theta\Big) + r^2\Big(\sin^4\theta\Big(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\Big) - 4\sin^4\theta\cos^2\theta\Big)\Big] \\
&= r\sin\theta\Big[\cos^2\theta\Big(2 - \sin^2\theta\Big) - r^2\Big(\sin^6\theta + 2\sin^4\theta\cos^2\theta\Big)\Big] \\
&= r\sin\theta\Big[\cos^2\theta\Big(2 - \sin^2\theta\Big) - r^2\sin^4\theta\Big(1 + \cos^2\theta\Big)\Big].
\end{aligned}$$

Quando $\sin\theta = 0$, abbiamo che $F\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big) = 0$.

Consideriamo il caso

$$\cos^2\theta = \frac{r^2\sin^4\theta\big(1+\cos^2\theta\big)}{2 - \sin^2\theta}.$$

Allora,

$$\cos^2\theta \leq 2r^2,$$

e di conseguenza

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 + O(r^2).$$

Tornando all'equazione per θ,

$$\cos^2\theta = \frac{r^2\big(1+O(r^2)\big)\big(1+O(r^2)\big)}{2 - \big(1+O(r^2)\big)} = r^2\big(1+O(r^2)\big).$$

Quindi,

$$\sup_\theta F\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big) = \frac{r^2\sqrt{1+O(r^2)}\,\big(1+O(r^2)\big)}{r^2\big(1+O(r^2)\big) + r^2\big(1+O(r^2)\big)^2} = \frac{1}{2} + O(r^2)\,;$$

$$\inf_\theta F\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big) = -\frac{r^2\sqrt{1+O(r^2)}\,\big(1+O(r^2)\big)}{r^2\big(1+O(r^2)\big) + r^2\big(1+O(r^2)\big)^2} = -\frac{1}{2} + O(r^2)\,.$$

Di conseguenza,

$$\limsup_{r\to0}\sup_\theta F\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big) = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \liminf_{r\to0}\inf_\theta F\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big) = -\frac{1}{2}$$

□

Osservazione 9. *Osserviamo che date due funzioni*

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \qquad e \qquad g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$$

valgono le disuguaglianze

$$\sup_{[0,2\pi]} f + \inf_{[0,2\pi]} g \le \sup_{[0,2\pi]} (f+g) \le \sup_{[0,2\pi]} f + \sup_{[0,2\pi]} g\,; \tag{2}$$

$$\inf_{[0,2\pi]} f + \inf_{[0,2\pi]} g \le \inf_{[0,2\pi]} (f+g) \le \inf_{[0,2\pi]} f + \sup_{[0,2\pi]} g\,. \tag{3}$$

In particolare, date due funzioni

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} \qquad e \qquad G : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},$$

tali che

$$\lim_{\rho\to 0} \Big\{ \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \big|G\big(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\big)\big| \Big\} = 0,$$

allora

$$\limsup_{\rho\to 0} \Big\{ \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \Big(F\big(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\big) + G\big(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\big)\Big) \Big\} = \limsup_{\rho\to 0} \Big\{ \sup_{\theta\in[0,2\pi]} F\big(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\big) \Big\}\,;$$

$$\liminf_{\rho\to 0} \Big\{ \inf_{\theta\in[0,2\pi]} \Big(F\big(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\big) + G\big(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\big)\Big) \Big\} = \liminf_{\rho\to 0} \Big\{ \inf_{\theta\in[0,2\pi]} F\big(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\big) \Big\}\,.$$

Esercizi sui limiti, liminf e limsup

Esercizio 10. *Studiare il comportamento (esistenza di limite, limsup e liminf), per $(x, y) \to (0, 0)$, delle funzioni seguenti:*

(1) $F(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 - xy}$;

(2) $F(x, y) = \dfrac{x^2 - xy^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;

(3) $F(x, y) = \dfrac{x^3 + x^2y^2}{x^2 + y^2}$;

(4) $F(x, y) = \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

(5) $F(x, y) = \dfrac{e^{x+y} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

(6) $F(x, y) = \dfrac{e^x - e^y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

(7) $F(x, y) = \dfrac{\cos(\sqrt{x^2 + y^2}) - \cos x}{x^2 + y^2}$;

(8) $F(x, y) = \dfrac{\cos(x) - \cos(y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

(9) $F(x, y) = \dfrac{(e^y - 1)\sin x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$.