Limiti in coordinate polari

Proposizione 1. *Sia* $F : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *una funzione a valori reali.*
Dato un numero reale ℓ*, sono equivalenti:*

(i) $\lim_{X\to 0} F(X) = \ell$;

(ii) $\lim_{\rho\to 0^+} \Big\{ \sup_{\partial B_\rho} \big|F - \ell\big| \Big\} = 0.$

Dimostrazione. Supponiamo che (i) *non vale.* Allora esistono $\varepsilon > 0$ ed una successione $X_n \to 0$ tali che

$$|F(X_n) - \ell| > \varepsilon \qquad \text{per ogni} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Poniamo $\rho_n := |X_n|$. Allora, abbiamo che

$$\rho_n \to 0 \qquad \text{e} \qquad \sup_{\partial B_{\rho_n}} \big|F - \ell\big| \geq |F(X_n) - \ell| > \varepsilon,$$

e quindi (ii) non vale.

Supponiamo che (ii) *non vale.* Allora, esistono $\varepsilon > 0$ ed una successione $\rho_n \to 0$ tali che

$$\sup_{\partial B_{\rho_n}} \big|F - \ell\big| > \varepsilon \qquad \text{per ogni} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Di conseguenza, su ogni sfera ∂B_{ρ_n} esiste un punto X_n tale che

$$\big|F(X_n) - \ell\big| > \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Siccome $|X_n| = \rho_n \to 0$, abbiamo che (i) non vale. □

In dimensione $d = 2$ possiamo riscrivere questa proposizione nel modo seguente:

Proposizione 2. *Sia* $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *una funzione a valori reali.*
Dato $\ell \in \mathbb{R}$*, sono equivalenti:*

(i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \ell$;

(ii) $\lim_{\rho\to 0^+} \Big\{ \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \big|F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - \ell\big| \Big\} = 0.$

Proposizione 3. *Sia* $F : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *una funzione a valori reali. Allora, sono equivalenti:*

(i) $\lim_{X\to 0} F(X) = +\infty$;

(ii) $\lim_{\rho\to 0^+} \Big\{ \inf_{\partial B_\rho} F \Big\} = +\infty.$

Dimostrazione. Supponiamo che (i) *non sia vero.* Allora, possiamo trovare una costante $M > 0$ ed una successione $X_n \to 0$ tali che

$$F(X_n) < M \qquad \text{per ogni} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Poniamo $\rho_n := |X_n|$. Allora, abbiamo che

$$\rho_n \to 0 \qquad \text{e} \qquad \inf_{\partial B_{\rho_n}} F \le F(X_n) < M,$$

e quindi (ii) non vale.

Supponiamo ora che (ii) *non sia vero.* Allora, esistono $M > 0$ ed una successione $\rho_n \to 0$ tali che

$$\inf_{\partial B_{\rho_n}} F < M \qquad \text{per ogni} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Di conseguenza, su ogni sfera ∂B_{ρ_n} esiste un punto X_n tale che

$$F(X_n) < M\,.$$

Siccome $|X_n| = \rho_n \to 0$, abbiamo che (i) non vale. □

Proposizione 4. *Sia* $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *una funzione a valori reali. Allora, sono equivalenti:*

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = +\infty$;

(ii) $\displaystyle\lim_{\rho\to 0^+} \Big\{ \inf_{\theta\in[0,2\pi]} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\Big\} = +\infty$.

Proposizione 5. *Sia* $F : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *una funzione a valori reali. Allora, sono equivalenti:*

(i) $\displaystyle\lim_{X\to 0} F(X) = -\infty$;

(ii) $\displaystyle\lim_{\rho\to 0^+} \Big\{ \sup_{\partial B_\rho} F\Big\} = -\infty$.

Dimostrazione. Supponiamo che (i) *non sia vero.* Allora, possiamo trovare una costante $M > 0$ ed una successione $X_n \to 0$ tali che

$$F(X_n) > -M \qquad \text{per ogni} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Poniamo $\rho_n := |X_n|$. Allora, abbiamo che

$$\rho_n \to 0 \qquad \text{e} \qquad \sup_{\partial B_{\rho_n}} F \le F(X_n) > -M,$$

e quindi (ii) non vale.

Supponiamo ora che (ii) *non sia vero.* Allora, esistono $M > 0$ ed una successione $\rho_n \to 0$ tali che

$$\sup_{\partial B_{\rho_n}} F > -M \qquad \text{per ogni} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Di conseguenza, su ogni sfera ∂B_{ρ_n} esiste un punto X_n tale che

$$F(X_n) > -M\,.$$

Siccome $|X_n| = \rho_n \to 0$, abbiamo che (i) non vale. □

Proposizione 6. *Sia* $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *una funzione a valori reali. Allora, sono equivalenti:*

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = -\infty$;

(ii) $\displaystyle\lim_{\rho\to 0^+} \Big\{ \sup_{\theta\in[0,2\pi]} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\Big\} = -\infty$.

Esempio di studio di un limite in coordinate polari

Esempio 7. *Dire se esiste (e se esiste, calcolarlo) il limite*

$$\ell := \lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) \qquad \textit{dove} \qquad F(x,y) := \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\Big(1+\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big)}.$$

Soluzione. Consideriamo il limite direzionale

$$\lim_{t\to 0^+} F(tV)$$

nella direzione $V=(1,0)$. Siccome

$$F(x,0)=0 \quad \text{per ogni} \quad x\in\mathbb{R},$$

abbiamo che

$$\lim_{t\to 0^+} F(tV) = \lim_{t\to 0^+} F(t,0) = 0.$$

Quindi, se il limite

$$\ell = \lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$$

esiste, allora necessariamente

$$\ell = 0.$$

Per vedere se effettivamente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = 0,$$

scriviamo la funzione F in coordinate polari:

$$F(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) = \frac{\rho\sin\theta}{\rho(1+\rho^{-2}\sin^2\theta)} = \frac{\sin\theta}{1+\rho^{-2}\sin^2\theta}.$$

Fissiamo un raggio $\rho>0$ e studiamo la funzione

$$f_\rho : [0,2\pi]\to\mathbb{R}\ , \qquad f_\rho(\theta) := \frac{\sin\theta}{1+\rho^{-2}\sin^2\theta}.$$

Per trovare il massimo di $|f_\rho|$ su $[0,2\pi]$, calcoliamo la derivata

$$f_\rho'(\theta) = \frac{\cos\theta\,(1-\rho^{-2}\sin^2\theta)}{(1+\rho^{-2}\sin^2\theta)^2}.$$

Quindi, abbiamo le seguenti possibilita per il punto di massimo θ_M del modulo $|f_\rho|$:

(1) il massimo è raggiunto negli estremi dell'intervallo: $\theta_M=0$ oppure $\theta_M=2\pi$;

(2) $\cos(\theta_M)=0$;

(3) $\sin(\theta_M)=\pm\rho$.

Nel caso (1), abbiamo semplicemente che $f_\rho(\theta_M)=0$.
Nel caso (2), osserviamo che necessariamenre $\sin(\theta_M)=\pm 1$ e quindi

$$|f_\rho|(\theta_M) = \frac{1}{1+\rho^{-2}} = \frac{\rho^2}{1+\rho^2}.$$

Nel caso (3), abbiamo che

$$|f_\rho|(\theta_M) = \frac{\rho}{2}.$$

Quindi,

$$\max_{\theta\in[0,2\pi]} f_\rho = \max\Big\{0,\frac{\rho^2}{1+\rho^2},\frac{\rho}{2}\Big\} = \frac{\rho}{2}.$$

Di conseguenza

$$\lim_{\rho\to 0^+}\Big\{\sup_{\theta\in[0,2\pi]}\big|F(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\big|\Big\} = \lim_{\rho\to 0^+}\frac{\rho}{2} = 0$$

e quindi il limite ℓ esiste ed è uguale a zero. $\square$