Limiti direzionali

Proposizione 1. *Siano* Ω *un insieme in* $\mathbb{R}^n$, X_0 *un punto della sua parte interna,* $X_0 \in \mathrm{int}(\Omega)$, *e sia*

$$F : \Omega \setminus \{X_0\} \to \mathbb{R}$$

una funzione a valori reali. Se esiste il limite

$$\lim_{X \to X_0} F(X) = \ell,$$

allora per ogni vettore non-nullo $V \in \mathbb{R}^n$ *esiste anche il limite*

$$\lim_{t \to 0^+} F(X_0 + tV) = \ell. \tag{1}$$

Osservazione 2. *Osserviamo che se* V *e* W *sono due vettori colineari e non-nulli, allora*

$$\lim_{t \to 0^+} F(X_0 + tV) = \lim_{t \to 0^+} F(X_0 + tW).$$

È sufficiente quindi calcolare i limiti direzionali (1) *solo per i vettori* V *di norma* 1.

Osservazione 3 (Limiti e coordinate polari)**.** *Osserviamo che in* $\mathbb{R}^2$ *ogni vettore* V *di norma* 1 *si può scrivere come*

$$V = (\cos\theta, \sin\theta) \quad \textit{per un qualche} \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Allora, data una funzione $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{X_0 := (x_0, y_0)\} \to \mathbb{R}$ *il limite*

$$\lim_{t \to 0^+} F(X_0 + tV)$$

si può scrivere come

$$\lim_{t \to 0^+} F(X_0 + tV) = \lim_{\rho \to 0^+} F(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta).$$

In questo, la poroposizione precedente implica che se esiste il limite

$$\lim_{X \to X_0} F(X) = \ell,$$

allora, per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$ *si ha che*

$$\lim_{\rho \to 0^+} F(x_0 + \rho\cos\theta\,,\, y_0 + \rho\sin\theta) = \ell.$$

Negli esempi concreti, Proposizione 1 si può usare in due modi.

- Per dimostrare la non-esistenza di limite in un determinato punto. Infatti, se si trovano due vettori non-nulli V, W tali che

$$\lim_{t \to 0^+} F(X_0 + tV) \neq \lim_{t \to 0^+} F(X_0 + tW),$$

  allora il limite $\lim_{X \to X_0} F(X)$ non esiste.

- Per indovinare il valore del limite (se esiste) in X_0. Infatti, abbiamo visto che se il limite $\lim_{X \to X_0} F(X)$ esiste, allora esiste anche $\lim_{t \to 0^+} F(X_0 + tV)$ e si ha l'uguaglianza

$$\lim_{t \to 0^+} F(X_0 + tV) = \lim_{X \to X_0} F(X).$$

Esercizio 4. *Data la funzione*

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2},$$

calcolare il limite $\lim_{t\to 0^+} F(tV)$ *al variare del vettore non-nullo* $V = (a,b) \in \mathbb{R}^2$*.*

Esercizio 5. *Data la funzione*

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^4},$$

calcolare il limite $\lim_{t\to 0^+} F(tV)$ *al variare del vettore non-nullo* $V = (a,b) \in \mathbb{R}^2$*.*

Esercizio 6. *Data la funzione*

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^4},$$

calcolare il limite $\lim_{t\to 0^+} F(tV)$ *al variare del vettore non-nullo* $V = (a,b) \in \mathbb{R}^2$*.*

Esercizio 7. *Data la funzione*

$$F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^4+z^6},$$

calcolare il limite $\lim_{t\to 0^+} F(tV)$ *al variare del vettore non-nullo* $V = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$*.*

Funzioni che ammettono tutti i limiti direzionali, ma non hanno un limite

Uno potrebbe congetturare, per esempio che, se per ogni vettore $V \in \mathbb{R}^n$ esiste il limite

$$\lim_{t\to 0^+} F(X_0 + tV) = \ell,$$

e questo limite è lo stesso per ogni vettore V, allora esiste (ed è uguale a ℓ) anche il limite

$$\lim_{X\to X_0} F(X).$$

Questo non è vero! Ecco due esempi.

Esempio 8. *Definiamo in* $\mathbb{R}^2$ *la funzione seguente:*

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{se} \quad x = y^2 \neq 0, \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora:

(1) *per ogni vettore* $V \in \mathbb{R}^2$ *si ha che*

$$\lim_{t\to 0^+} F(tV) = 1;$$

(2) *il limite*

$$\lim_{X\to 0} F(X).$$

non esiste. Infatti, esistono due successioni di punti $X_n \to 0$ *e* $Y_n \to 0$ *tali che*

$$\lim_{n\to\infty} F(X_n) = 1 \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} F(Y_n) = 0.$$

Esempio 9. *Consideriamo la funzione*

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to 0 \ , \qquad F(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} \ .$$

Per ogni vettore

$$V = (a,b)$$

calcoliamo

$$F(ta,tb) = \frac{tab^2}{a^2+t^2b^4} \, .$$

Se $a = 0$*, allora* $F(ta,tb) = 0$ *per ogni* t*; in questo caso*

$$\lim_{t\to 0^+} F(ta,tb) = 0.$$

Se invece $a \neq 0$*, allora*

$$\lim_{t\to 0} \frac{tab^2}{a^2+t^2b^4} = 0.$$

In conclusione,

$$\lim_{t\to 0} F(tV) = 0 \qquad \text{per ogni} \qquad V \neq (0,0).$$

D'altra parte, se consideriamo la successione

$$X_n = \Big(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\Big),$$

abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} F(X_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\big({}^1/_{n^2}\big)\big({}^1/_n\big)^2}{\big({}^1/_{n^2}\big)^2 + \big({}^1/_n\big)^4} = \frac{1}{2} \, .$$

Quindi il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$$

non esiste.