Funzioni derivabili e derivate parziali

Definizione ed esempi

Definizione 1. *Sia Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione data.*

(i) *Diciamo che la funzione f è* **derivabile** *nel punto $X = (x_1, \dots, x_d) \in \Omega$, se per ogni $i = 1, \dots, d$ esistono le* **derivate parziali**

$$\partial_{x_i} f(X) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_d) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_d)}{h} .$$

Per le derivate parziali di f sono comunemente usate le seguenti notazioni:

$$\partial_{x_i} f = \partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

(ii) *Il vettore colonna con coordinate $\partial_i f(X)$, $i = 1, \dots, d$, è detto* **gradiente** *di f nel punto X*

$$\nabla f(X) := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(X) \\ \vdots \\ \partial_{x_i} f(X) \\ \vdots \\ \partial_{x_d} f(X) \end{pmatrix} .$$

(iii) *Diciamo che funzione f è derivabile in Ω, se lo è in ogni punto $X \in \Omega$.*

Proposizione 2 (Operazioni algebriche con le derivate parziali)**.** *La somma e il prodotto di funzioni derivabili sono funzioni derivabili e valgono le identita seguenti:*

$$\partial_i (f + g) = \partial_i f + \partial_i g \qquad e \qquad \partial_i (fg) = f\, \partial_i g + g\, \partial_i f\ .$$

Dimostrazione. Segue direttamente dalle formule per le funzioni derivabili di una variabile. □

Esempio 3. *La funzione di due variabili $F(x, y) = \sin(xy)$ è derivabile e si ha:*

$$\partial_x F(x, y) = y \cos(xy) \qquad e \qquad \partial_y F(x, y) = x \cos(xy).$$

Esempio 4. *La funzione di due variabili $F(x, y) = \dfrac{y}{1 + x^2}$ è derivabile e si ha:*

$$\partial_x F(x, y) = \frac{-2xy}{(1 + x^2)^2} \qquad e \qquad \partial_y F(x, y) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Esempio 5. *La funzione di tre variabili $F(x, y, z) = xz^2 - 8yz$ è derivabile e si ha:*

$$\partial_x F(x, y, z) = z^2\ , \qquad \partial_y F(x, y, z) = -8z \qquad e \qquad \partial_z F(x, y, z) = 2xz - 8y.$$

Funzioni con gradiente identicamente nullo

Teorema 6 (Funzioni con gradiente nullo)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto e connesso per archi. Sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su Ω e tale che*

$$\partial_{x_i} F(X) = 0 \quad \textit{per ogni} \quad X \in \Omega \quad \textit{ed ogni} \quad i = 1, \dots, d.$$

Allora F è costante su Ω.

Dimostrazione. Per semplicità supponiamo che $d = 2$. Siano

$$(x_0, y_0) \in \Omega$$

un punto fissato e

$$(x_1, y_1) \in \Omega$$

un qualsiasi altro punto. Dimostreremo che $F(x_1, y_1) = F(x_0, y_0)$. Sia

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \ , \qquad \gamma(t) = (x(t), y(t)) \ ,$$

un arco che collega (x_0, y_0) a (x_1, y_1) in Ω, ovvero:

$$\gamma(0) = (x_0, y_0), \quad \gamma(1) = (x_1, y_1), \quad \gamma(t) \in \Omega \quad \text{per ogni} \quad t \in [0, 1].$$

Definiamo

$$T := \sup \Big\{ t \in [0, 1] \ : \ F(\gamma(t)) = F(x_0, y_0) \Big\}.$$

Per la definizione di estremo superiore, esiste una successione t_n tale che

$$t_n \to T \quad \text{e} \quad F(\gamma(t_n)) = F(x_0, y_0).$$

Per la continuità di γ e di F, si ha:

$$F(\gamma(T)) = \lim_{n \to +\infty} F(\gamma(t_n)) = \lim_{n \to +\infty} F(x_0, y_0) = F(x_0, y_0).$$

Ora, siccome Ω è aperto, esiste $\varepsilon > 0$ tale per cui il quadrato

$$\mathcal{R} := (-\varepsilon + x(T), x(T) + \varepsilon) \times (-\varepsilon + y(T), y(T) + \varepsilon)$$

sia contenuto in Ω. Ora, siccome le derivate parziali di F sono nulle, si ottiene che

$$F(x, y) = F(x(T), y(T)) = F(x_0, y_0) \quad \text{per ogni} \quad (x, y) \in \mathcal{R}.$$

D'altra parte, siccome le funzioni

$$x : [0, 1] \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad y : [0, 1] \to \mathbb{R}$$

sono continue (questo perché sono le componenti della curva γ), si ha che esiste un $\delta > 0$ tale per cui:

$$x(t) \in (-\varepsilon + x(T), x(T) + \varepsilon) \quad \text{e} \quad y(t) \in (-\varepsilon + x(T), x(T) + \varepsilon),$$

per ogni $t \in [0, 1]$ tale che $t \in (T - \delta, T + \delta)$. In particolare,

$$F(x(t), y(t)) = F(x_0, y_0)$$

per ogni $t \in [0, 1] \cap (T - \delta, T + \delta)$. Per la definizione di T (come estremo superiore dell'insieme di tempi τ tale per cui $F(\gamma(\tau)) = F(x_0, y_0)$), si ha che necessariamente

$$T = 1.$$

Quindi $F(x_1, y_1) = F(\gamma(T)) = F(x_0, y_0)$.

$\square$